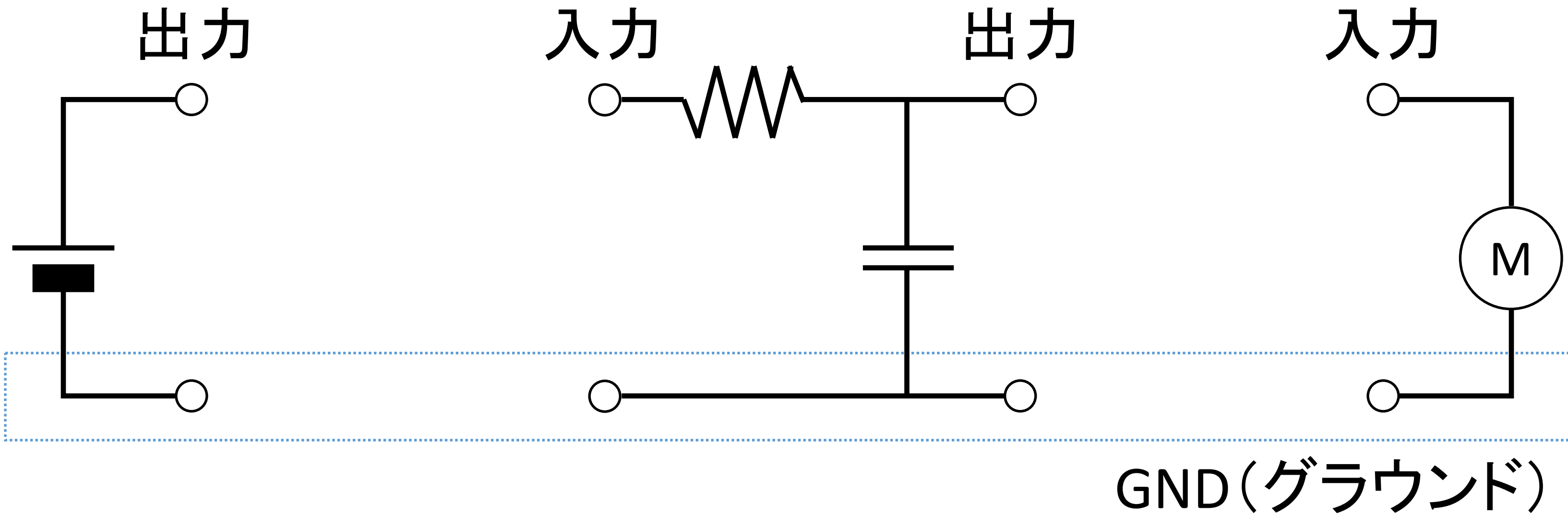
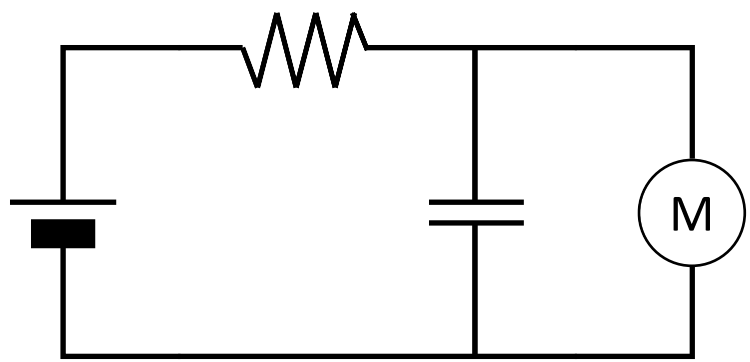
医用工学概論

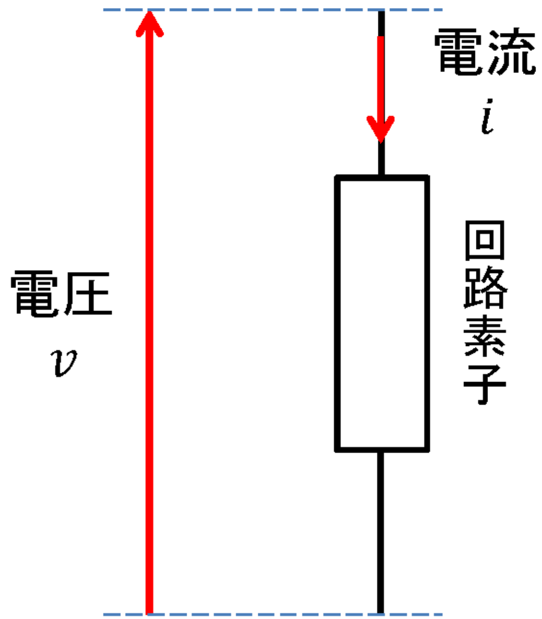
第５回
電気の基礎２（過渡現象）

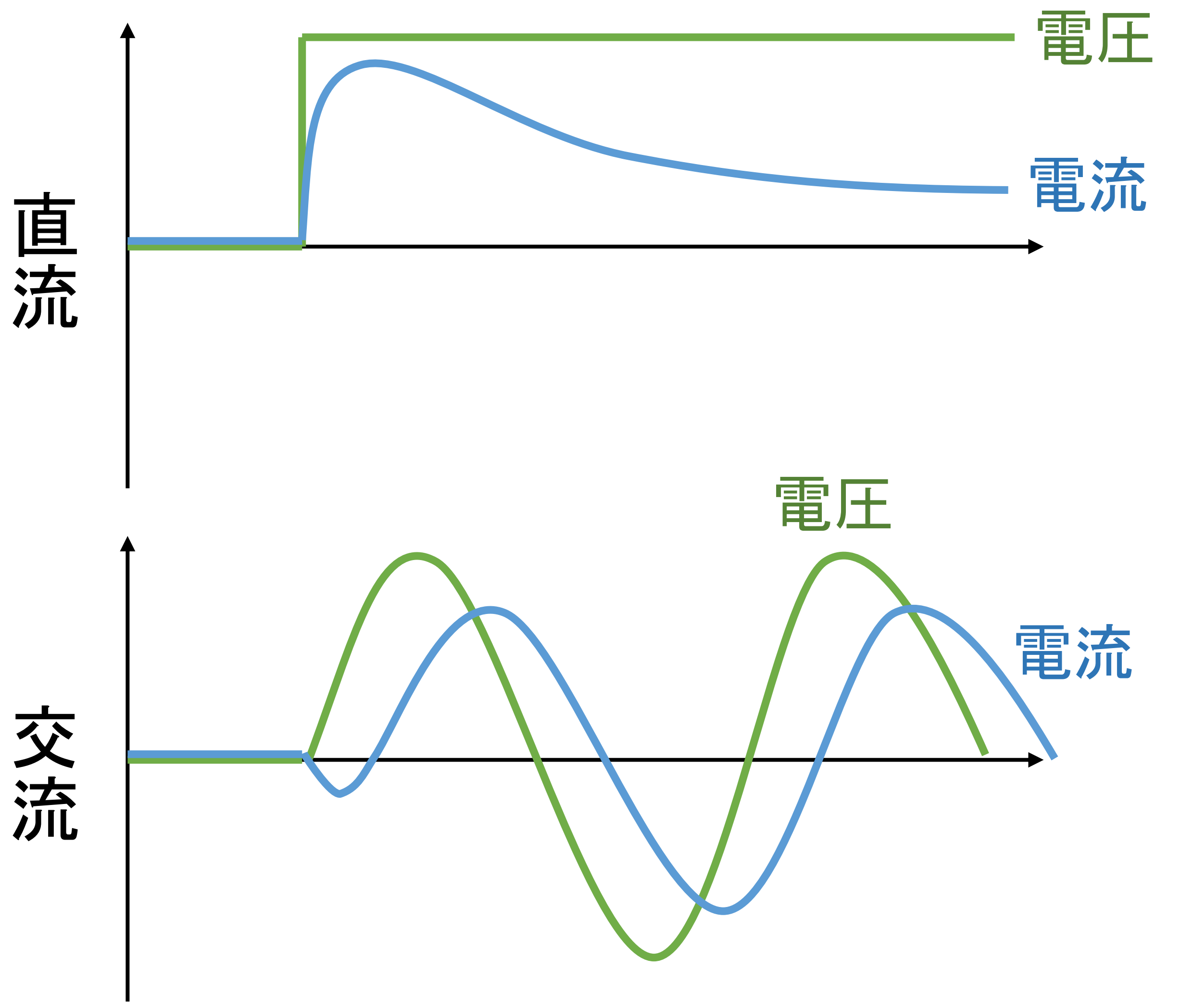
回路の表現





直流/交流での電圧/電流



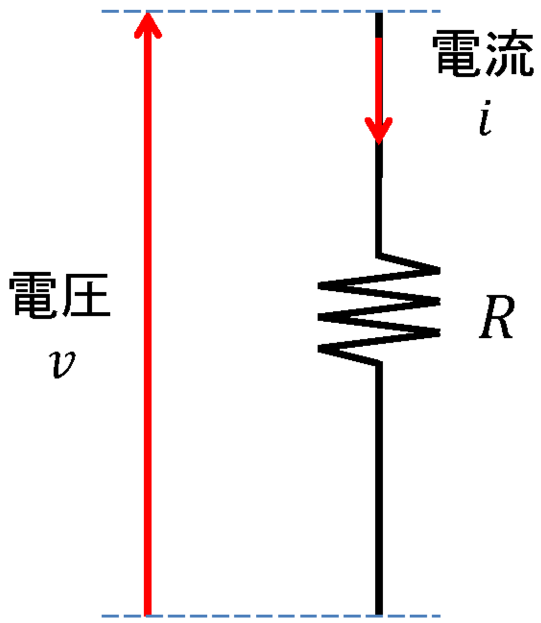


抵抗

電圧と電流の関係は，　**オームの法則**　によって決まる．

記号R
単位 [Ω]（**オーム**）

$$V = RI$$



電圧

$$v = Ri$$

電流

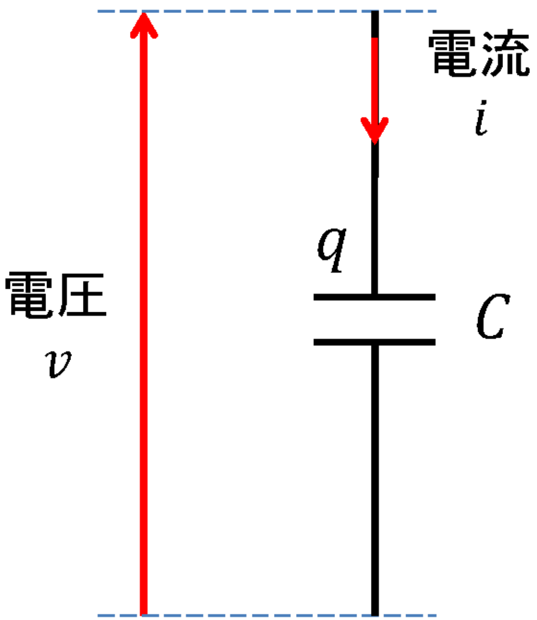
$$i = \frac{1}{R} v \qquad (i = Gv)$$

電気抵抗の逆数

コンデンサ

電圧と電流の関係は，　**誘電分極の式**　によって決まる．

記号C
単位 [F]（ファラド）



$$Q = CV$$

電圧

$$v = \frac{1}{C}\int idt$$

電流

$$i = C\frac{dV}{dt}$$

電流は電荷の流れ

$$i = \frac{dq}{dt}$$

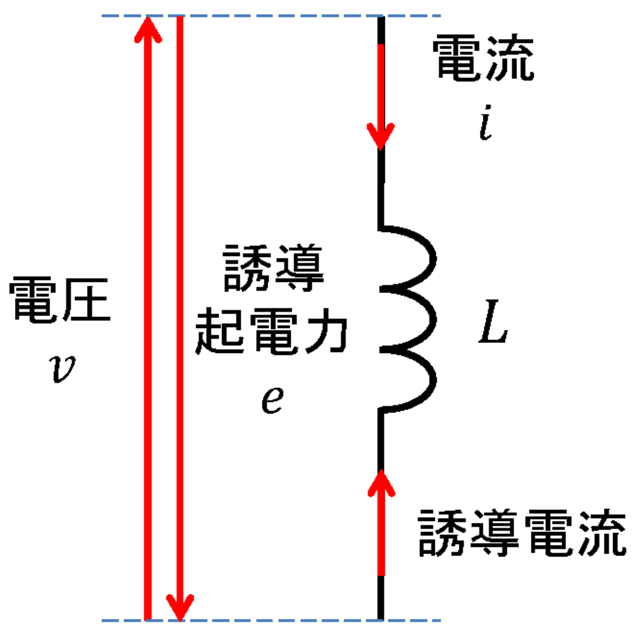
$$q = \int idt$$

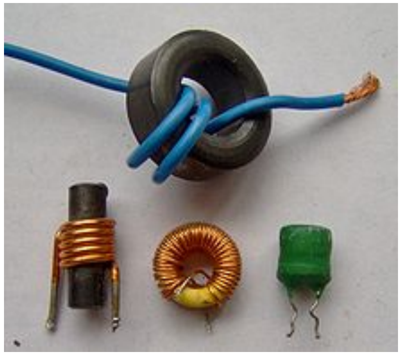
インダクタ

電圧と電流の関係は，　**電磁誘導の法則**　によって決まる.

記号L
単位 [H]（ヘンリー）

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$





電圧

$$v = L\frac{di}{dt}$$

電流

$$i = \frac{1}{L}\int v dt$$

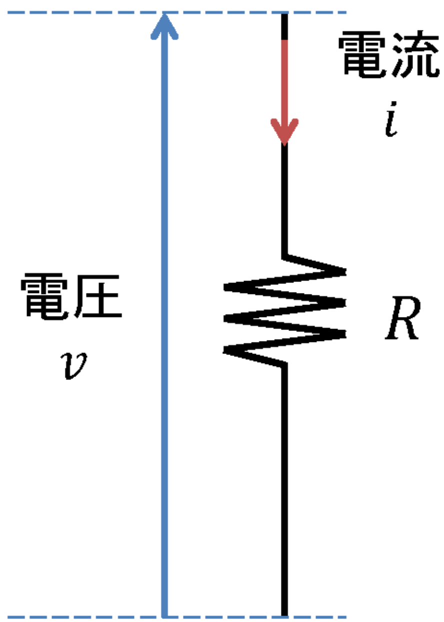
コイルの作る磁界を打ち消す向きに誘導起電力が発生する.

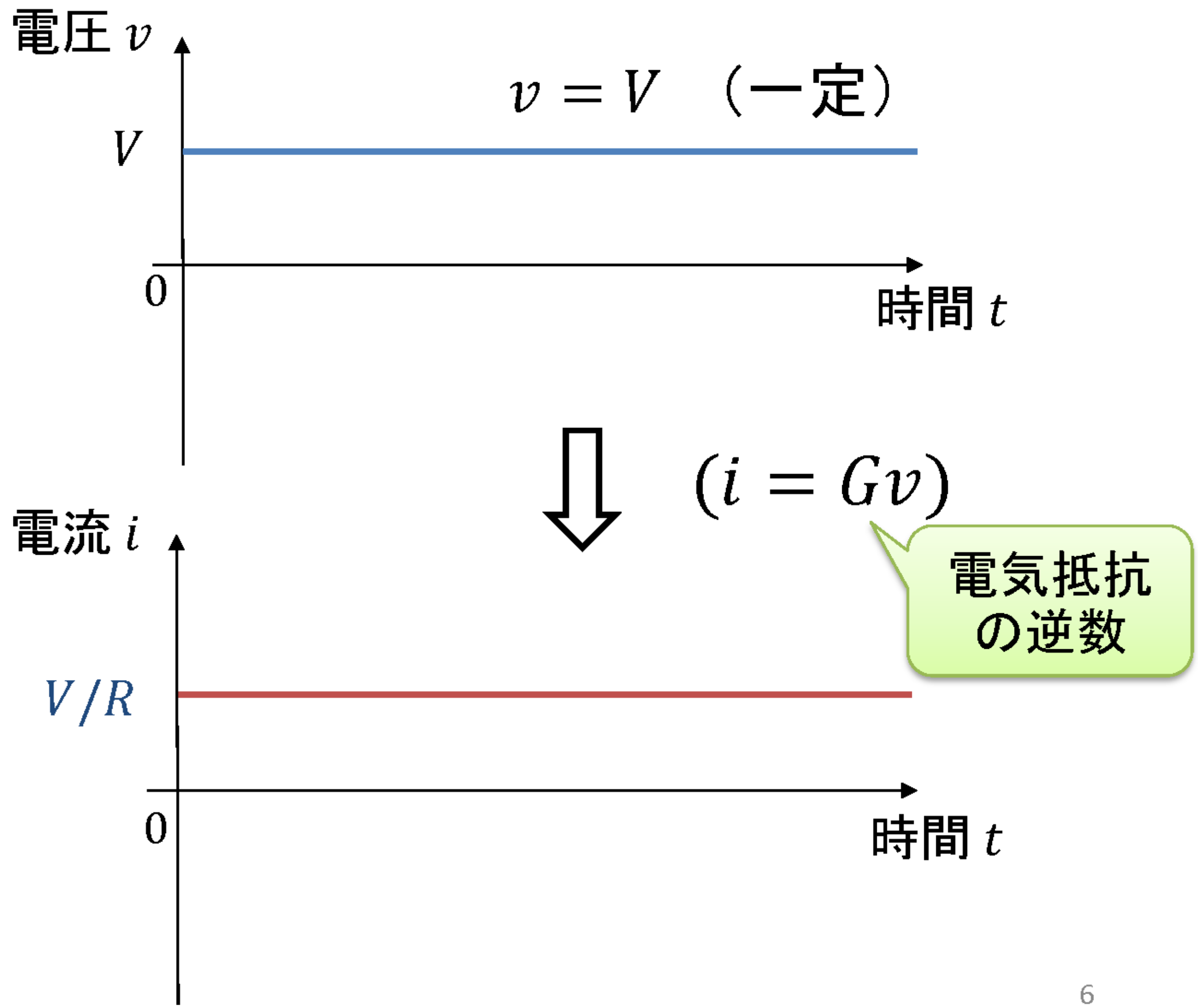
$$v = -e$$

$$\phi = Li$$

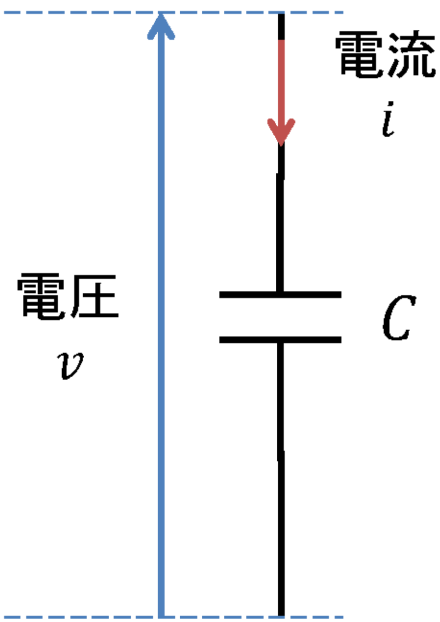
※インダクタンス：コイルなどにおいて電流の変化が誘導起電力となって現れる性質

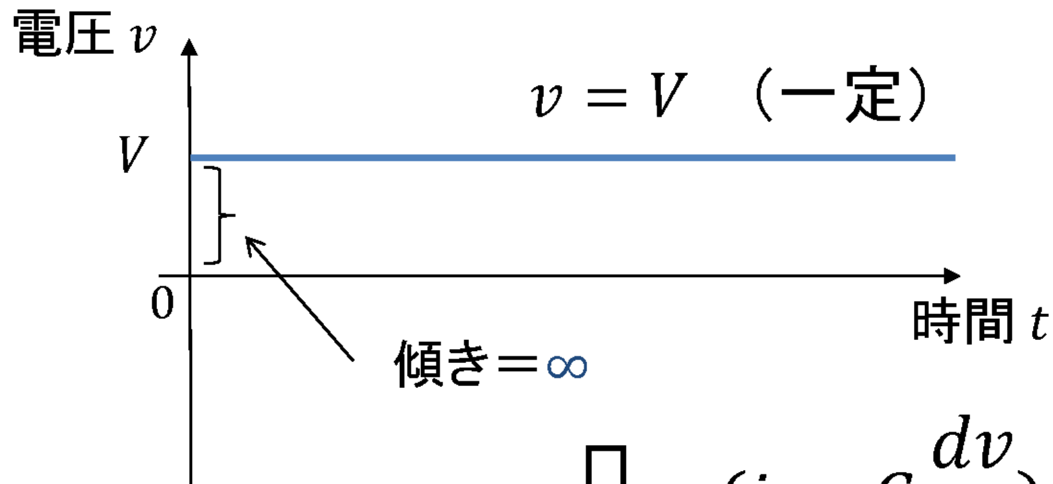
抵抗



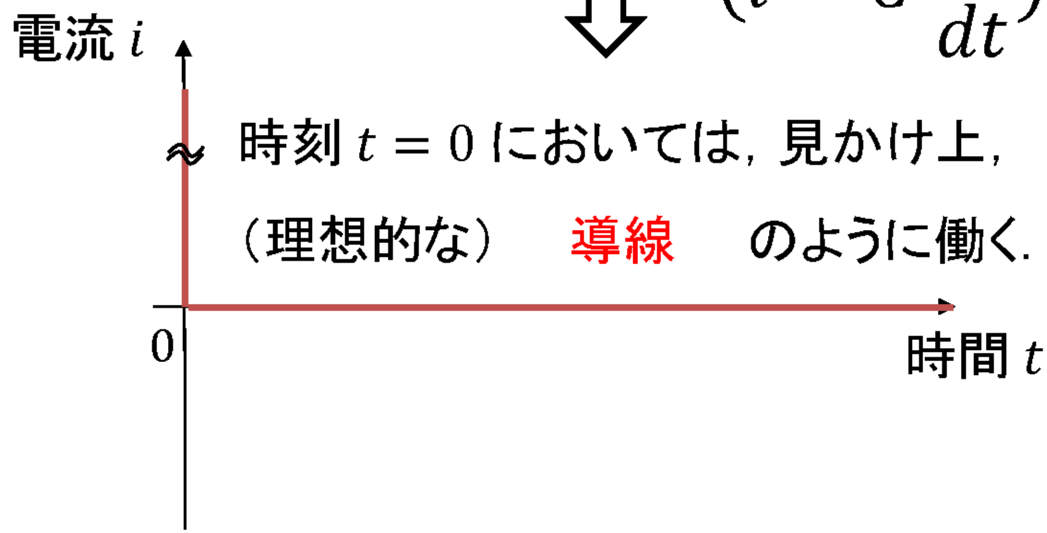


コンデンサ





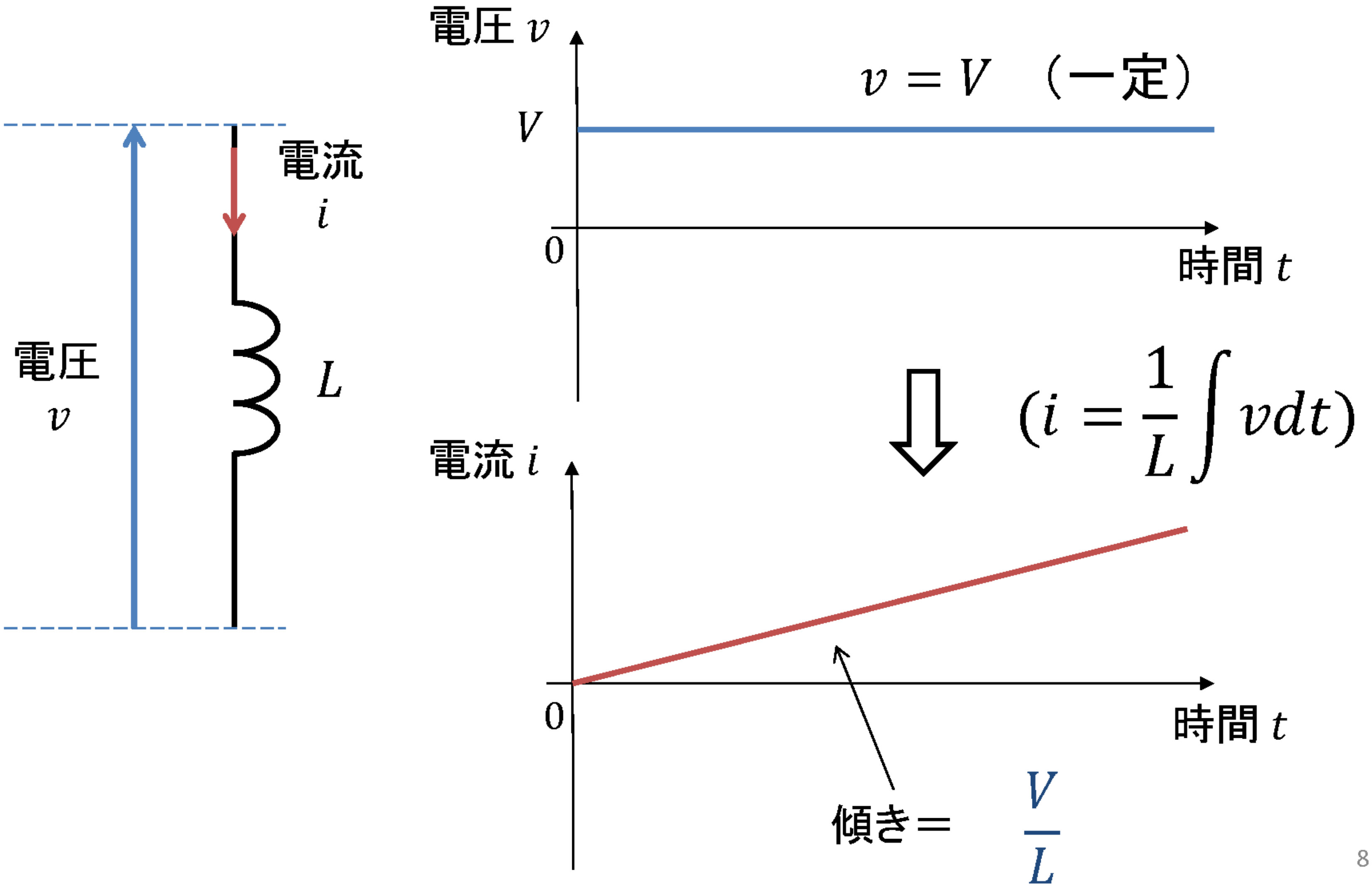
$$\Downarrow \quad \left(i = C\frac{dv}{dt}\right)$$



時刻 $t = 0$ においては，見かけ上，

（理想的な）　**導線**　のように働く.

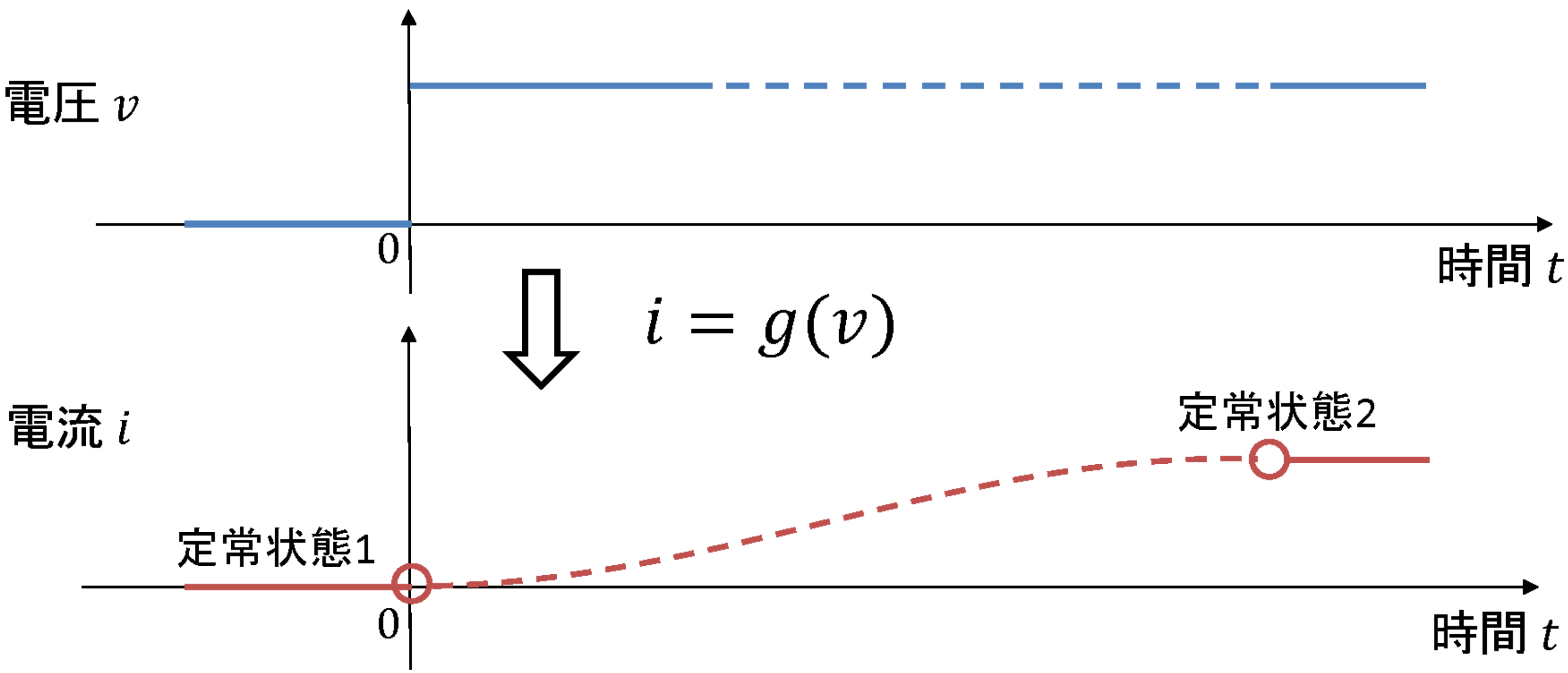
インダクタ



電流
i
電圧
v
L
電圧 v
$v = V$　（一定）
V
0
時間 t
$\left(i = \frac{1}{L}\int v\,dt\right)$
電流 i
0
時間 t
傾き＝ $\frac{V}{L}$

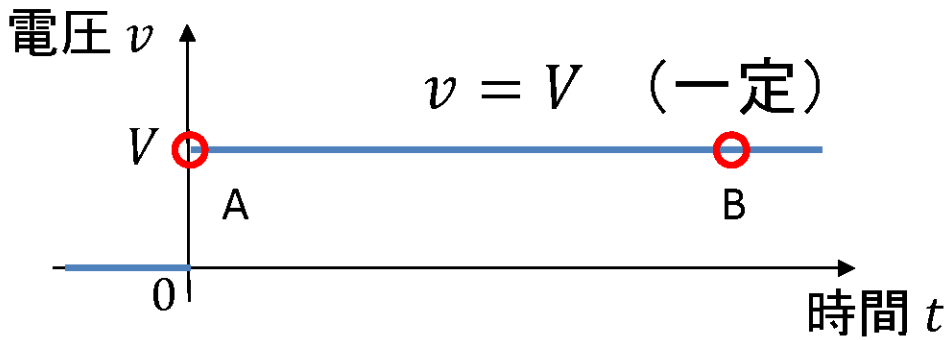
過渡現象

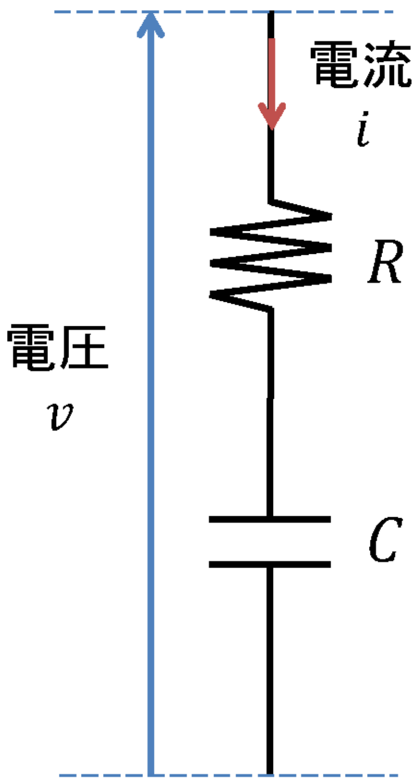
ある定常状態(安定な状態)から別の定常状態に移る現象



どのように変化するかを調べる ⟺ 微分方程式を解く

C-R 結合回路





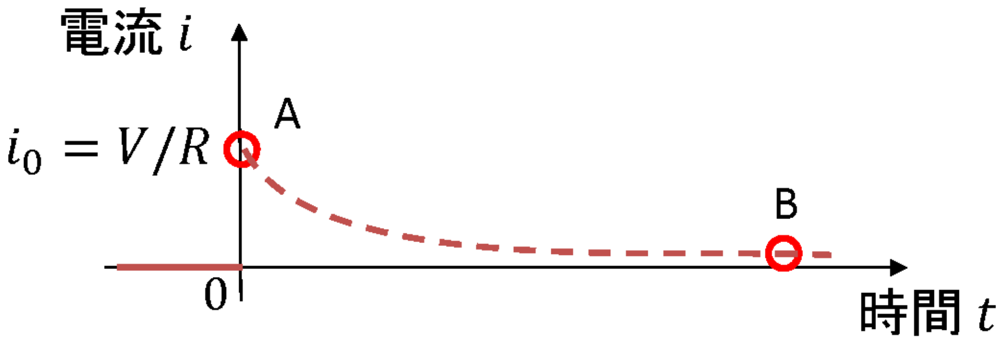
A 見かけ上，抵抗のみに電流が流れる．

$$i\Big|_{t=0} = \frac{V}{R}$$

B 十分に時間が経てば，電流は流れなくなる．

$$i\Big|_{t\gg 0} \approx 0$$

C-R 結合回路



$$\frac{dv}{dt} = R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i \qquad \left(v = Ri + \frac{1}{C}\int idt\right)$$

直列接続だから,
流れる電流は同じ

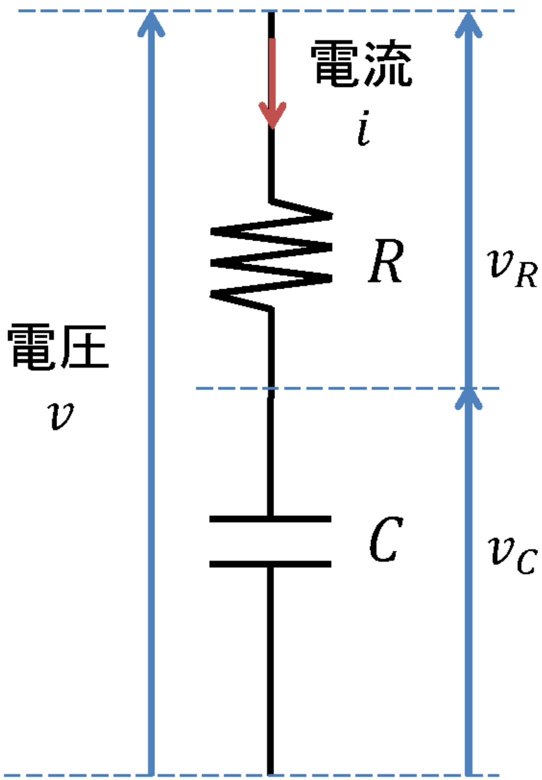
$v = V$ だから, $\dfrac{dv}{dt} = 0$.

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{1}{CR}i$$

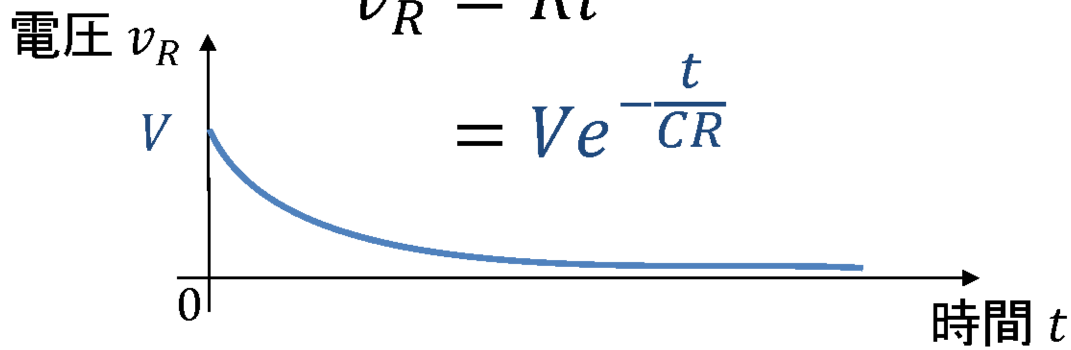
$$i = i_0 e^{-\frac{t}{CR}}$$

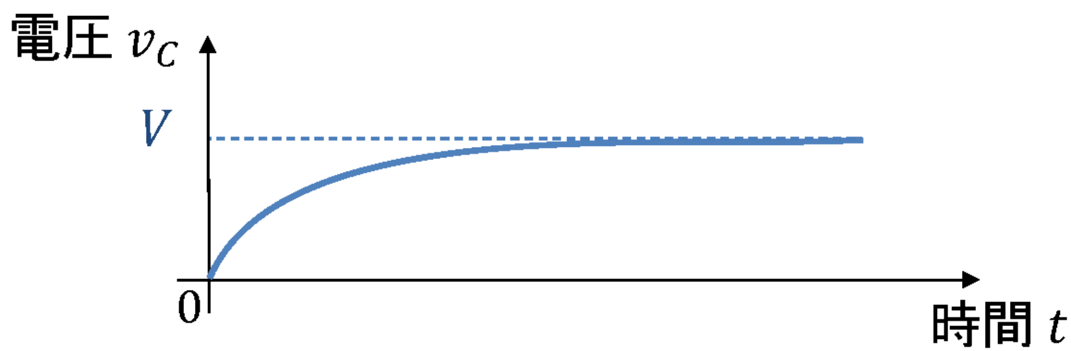
参照）補助資料（数学）

C-R 結合回路



$$v_R = Ri$$
$$= Ve^{-\frac{t}{CR}}$$





$$v_C = V - Ri$$
$$= V\left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right)$$

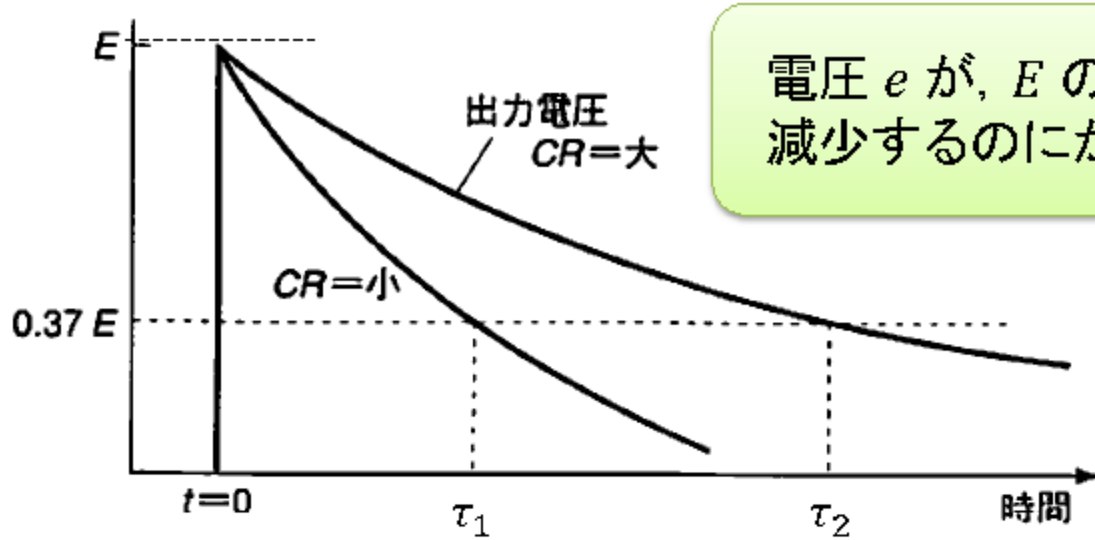
時定数

過渡現象の　変化にかかる時間　を特徴づける指標

$$e = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$ ← CR結合回路では，$\tau = CR$.

自然対数の底
$e \approx 2.72$

$t = \tau$ の時
$e^{-1} \approx 0.37$

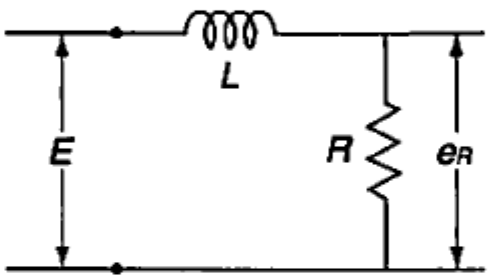


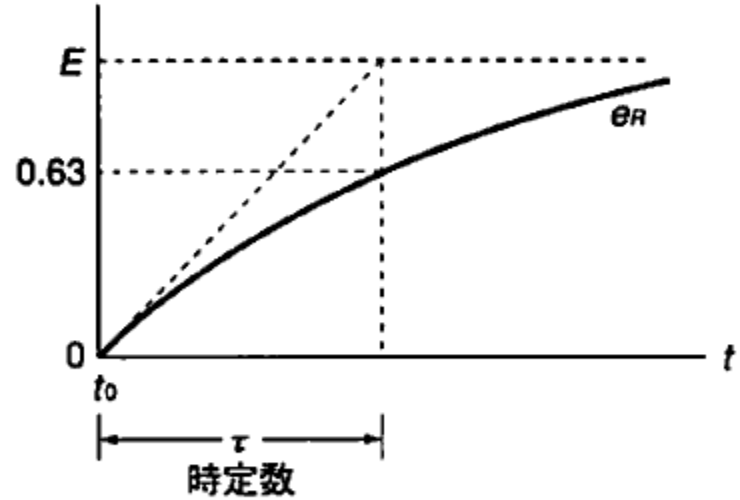
電圧 e が，E の約37%まで減少するのにかかる時間

時定数 $\tau = CR$ の単位　$[\Omega\mathrm{F}] = \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}}\right] = \left[\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{A}}\right] = [\mathrm{s}]$

第2章 p.51 図2-41

L-R 結合回路





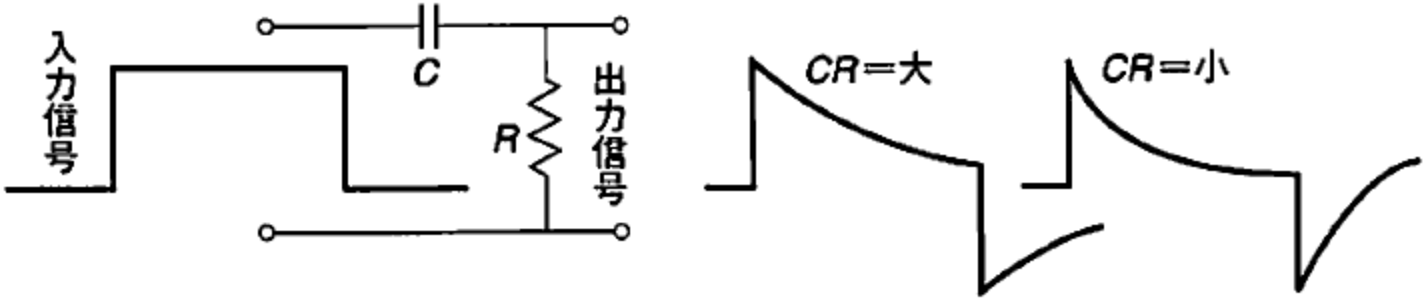
$$E = Ri + L\frac{di}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} - \frac{R}{L}i \quad \Leftrightarrow \quad i = i_0\left(1 - e^{-\frac{t}{L/R}}\right)$$

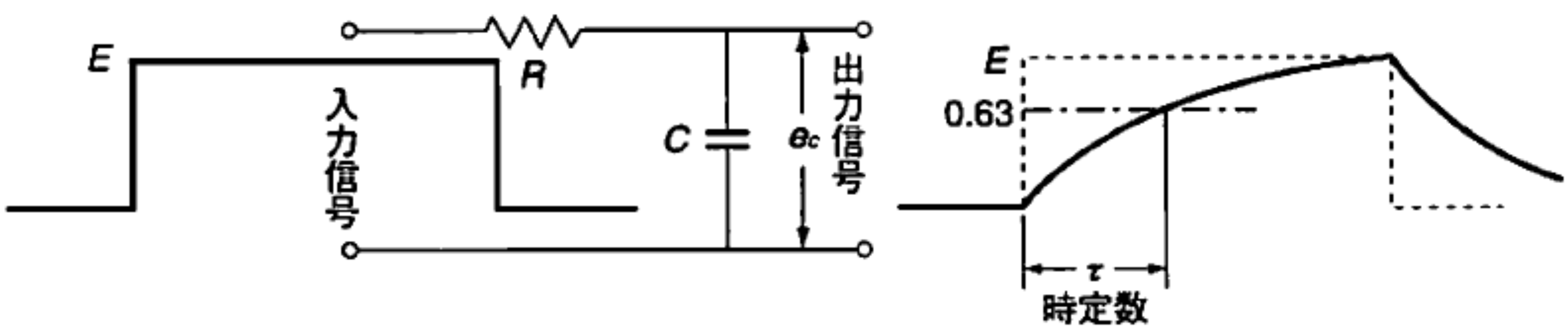
時定数 $\tau = L/R$ の単位　$[\mathrm{H}/\Omega] = \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A/s}}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}}\right] = \left[\frac{1}{1/\mathrm{s}}\right] = [\mathrm{s}]$　第2章 p.52 図2-44

微分回路・積分回路

微分回路　入力信号の **変化分** を出力信号に変換する.



積分回路　入力信号の **累積分** を出力信号に変換する.

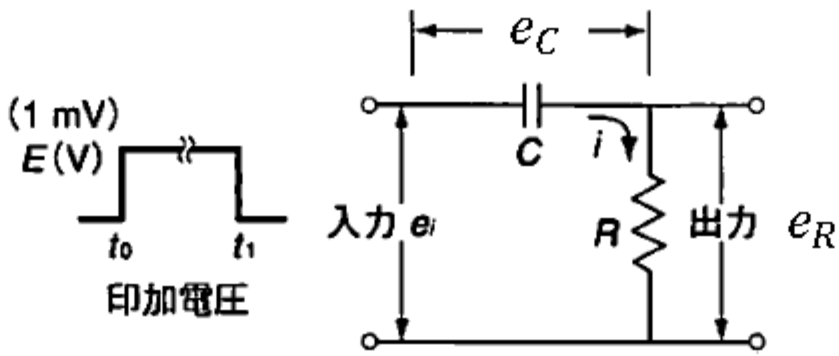


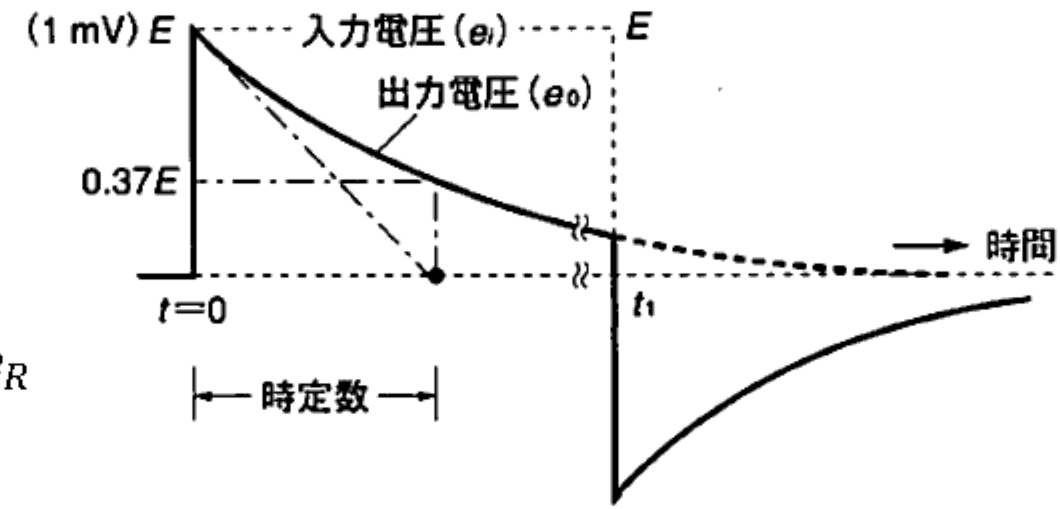
第2章 p.52　図2-42

第2章 p.52　図2-43

（計算例）

$R = 6\mathrm{M}\Omega, \quad C = 0.1\mu\mathrm{F}$ としたとき，時定数はいくらか．





時定数 $\tau =$ 0.6 [s]

第2章 p.50 図2-40

電気回路（直流回路）の復習

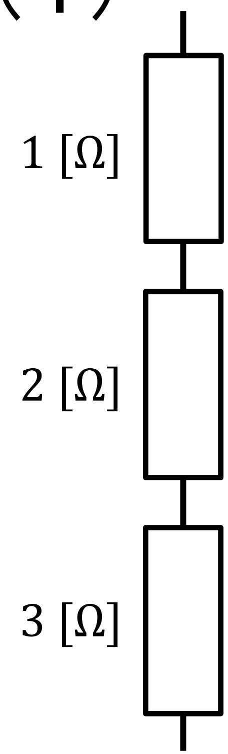
・合成抵抗
・電力、熱量
・キルヒホッフの法則
・ホイートストンブリッジ

✴がついた問題は難しいのでやらなくてもいいです。
　時間が余ったら挑戦してみてください。

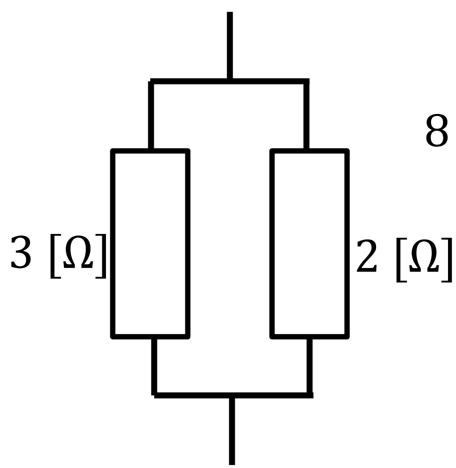
例題1　合成抵抗

次の合成抵抗を求めよ。

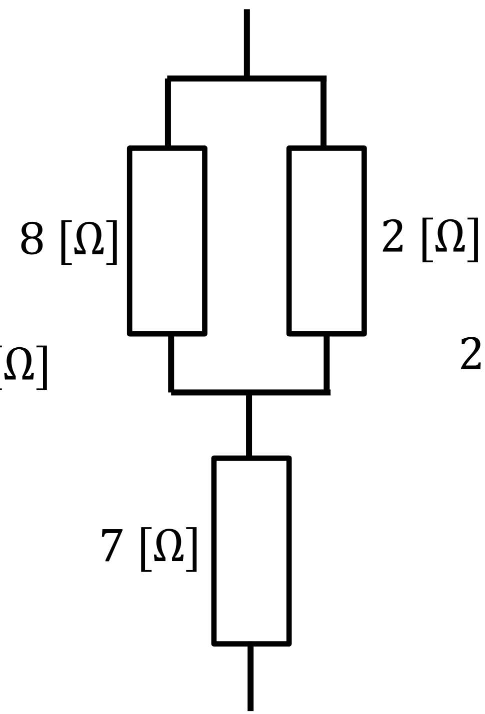
（1）



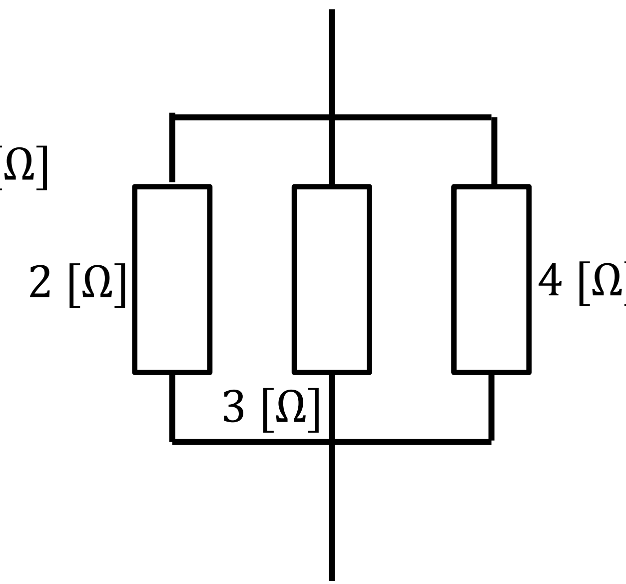
（2）



（3）



（4）



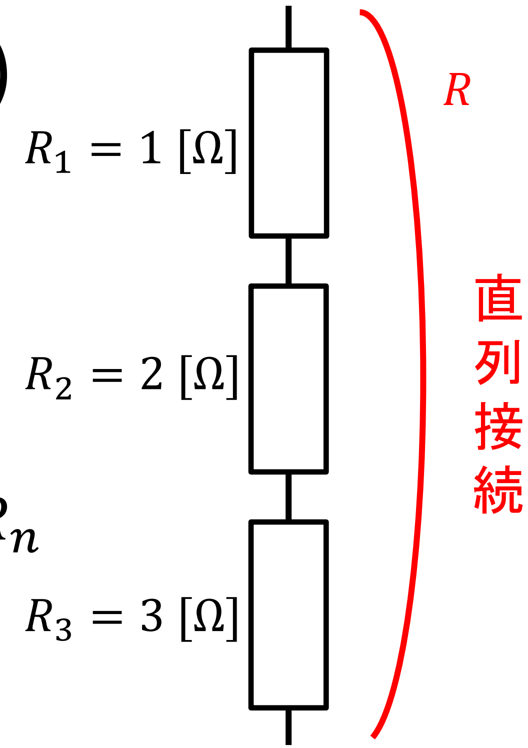
例題1　解答(1)

(1)

直列接続の合成抵抗は

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$

(全部の抵抗値を足し合わせればいい)

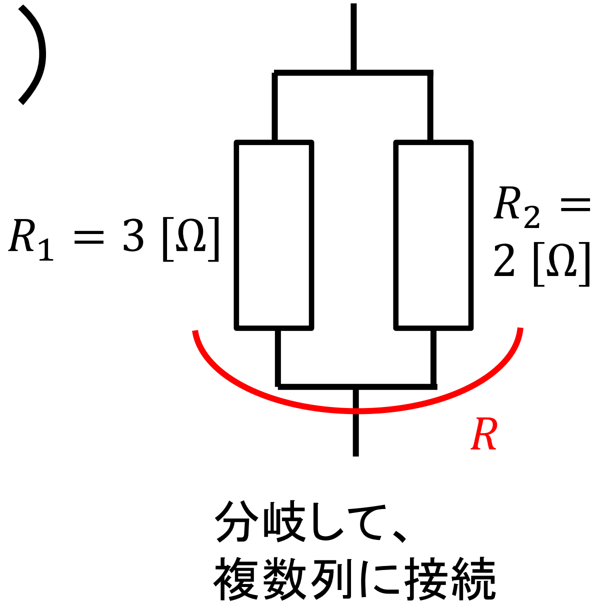


分岐せず、
一列に接続

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = 1 + 2 + 3$$
$$= 6$$

正解:　6 [Ω]

例題1　解答(2)



（2）

抵抗2つの並列接続の合成抵抗は

$$R = \frac{積}{和} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}$$
$$= \frac{3 \times 2}{3 + 2} = \frac{6}{5} = 1.2$$

正解：　1.2 [Ω]

例題1　解答(３)

（３）並列部分と直列部分に分けて考える

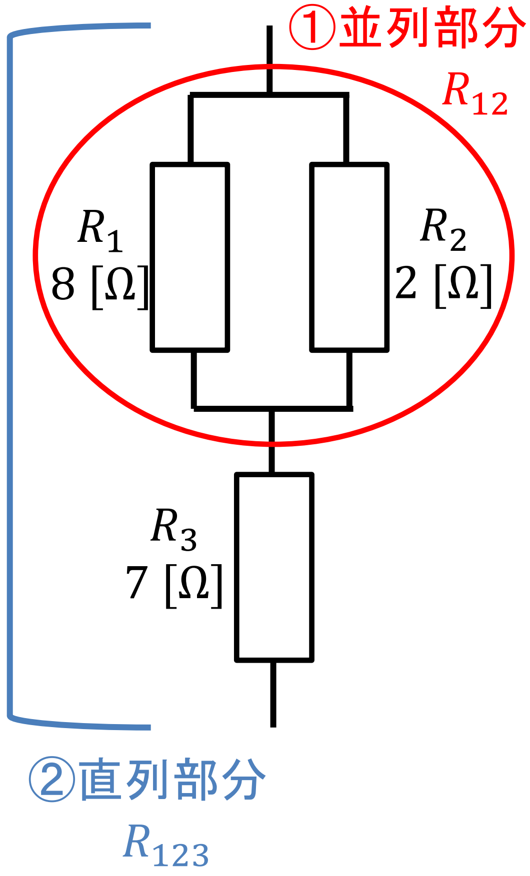
①並列部分（上半分）

$$R_{12} = \frac{\text{積}}{\text{和}} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{8 \times 2}{8 + 2} = \frac{16}{10} = 1.6$$

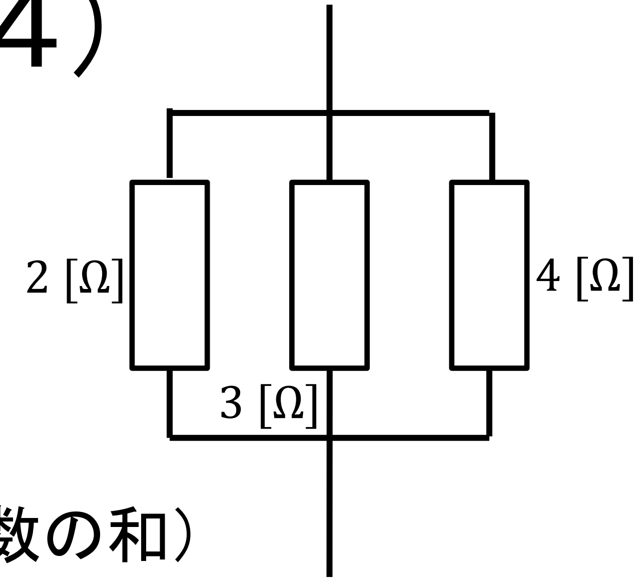
②直列部分（全体）

$$R_{123} = R_{12} + R_3 = 1.6 + 7 = 8.6$$

正解：　8.6 [Ω]



例題1　解答(4)



(4)2つ以上の並列接続の合成抵抗は

$$\frac{1}{R}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\cdots+\frac{1}{R_n}$$

(合成抵抗の逆数はそれぞれの抵抗の逆数の和)

<u>1.抵抗の逆数を全部たす</u>

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1\times 6}{12}+\frac{1\times 4}{12}+\frac{1\times 3}{12}=\frac{6}{12}+\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{13}{12}$$

<u>2.个で求めた値の逆数を求める</u>

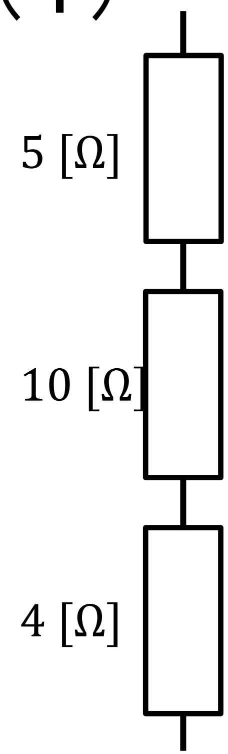
$$\frac{13}{12}\text{の逆数}=\frac{12}{13}$$

正解:　$\frac{12}{13}$ [Ω]

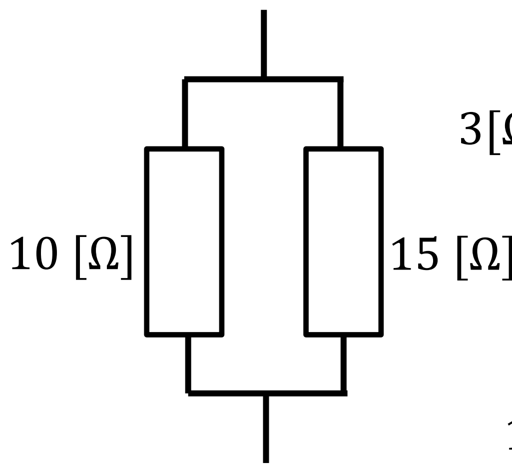
練習問題1

次の合成抵抗を求めよ。

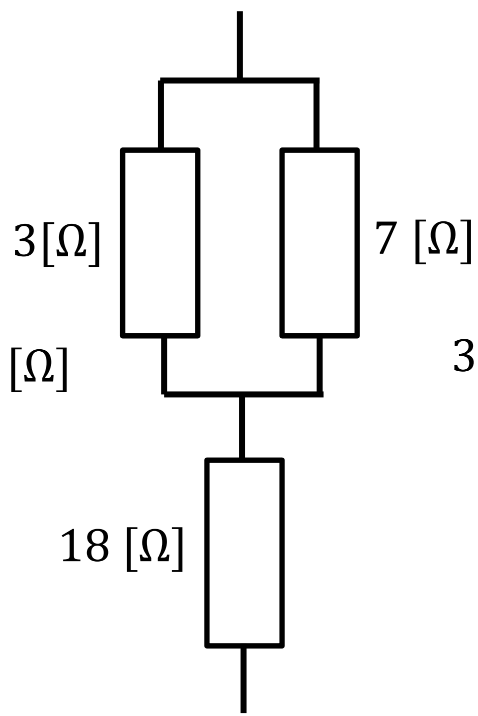
（１）



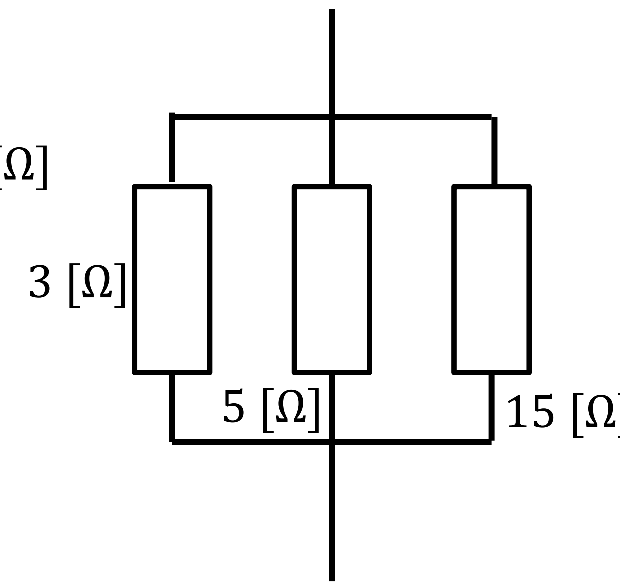
（２）



（３）



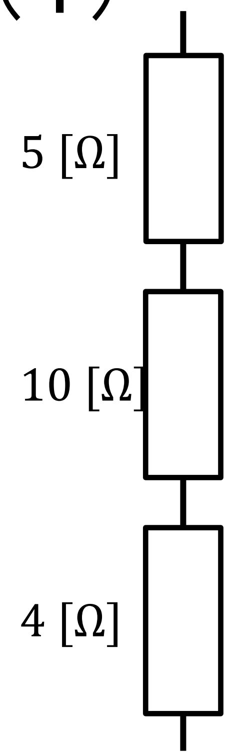
（４）



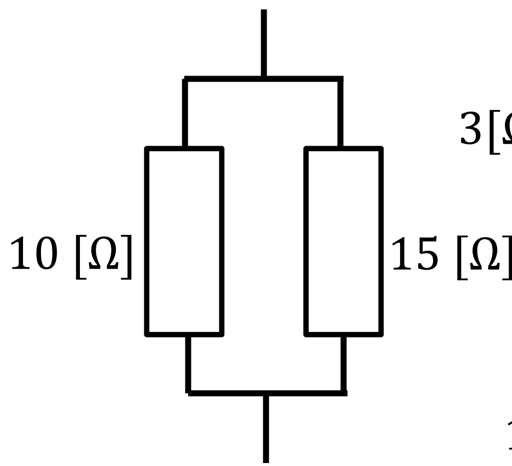
練習問題1 解答

次の合成抵抗を求めよ。

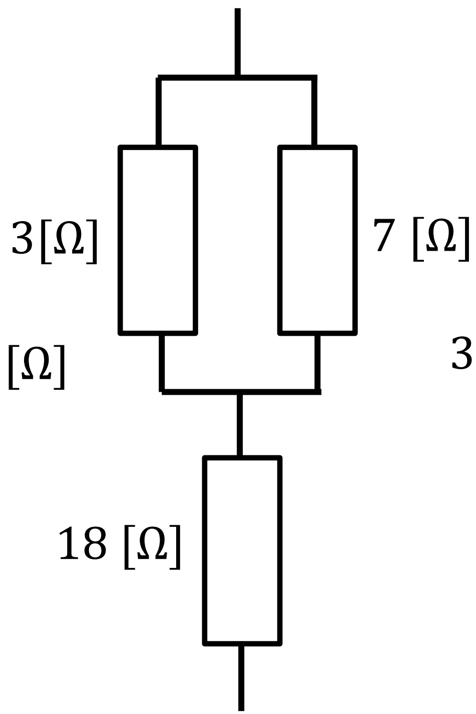
（1）



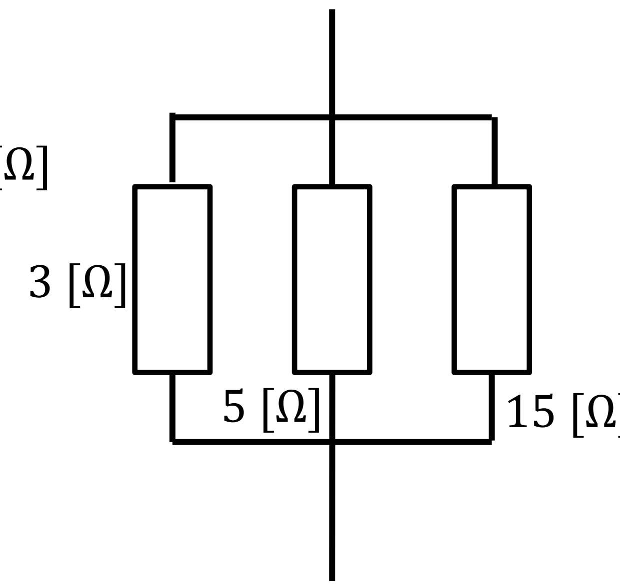
（2）



（3）



（4）



19

6

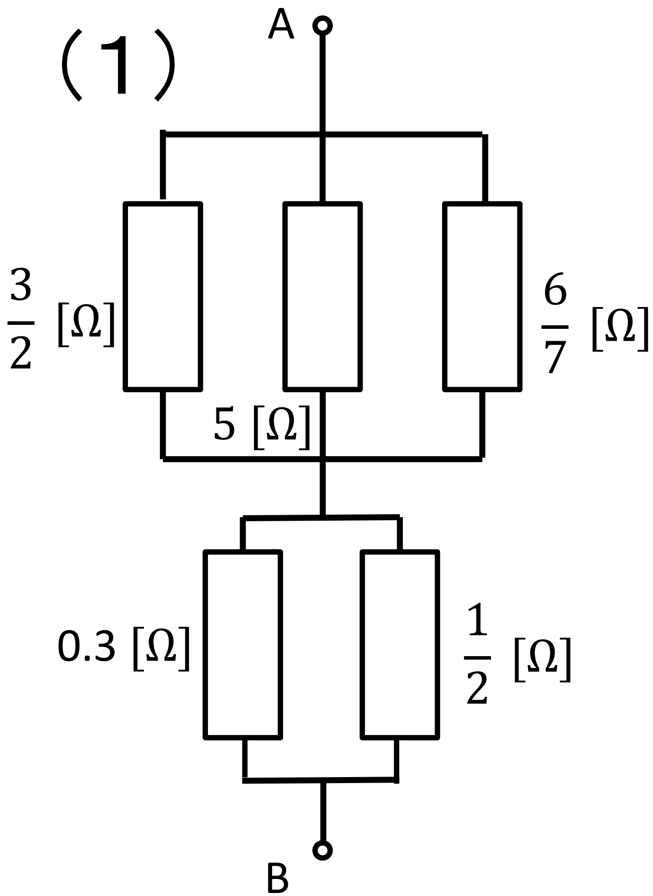
20.1

5/3[Ω]

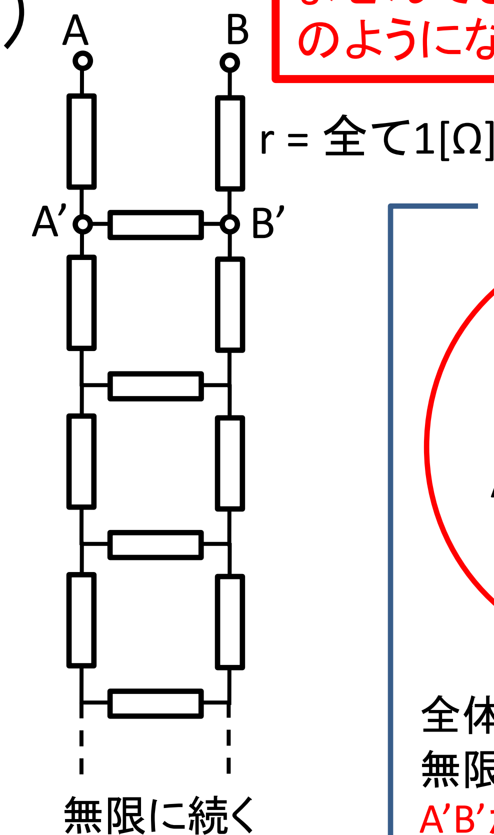
＊応用問題1

AB間の合成抵抗を求めよ。

（1）

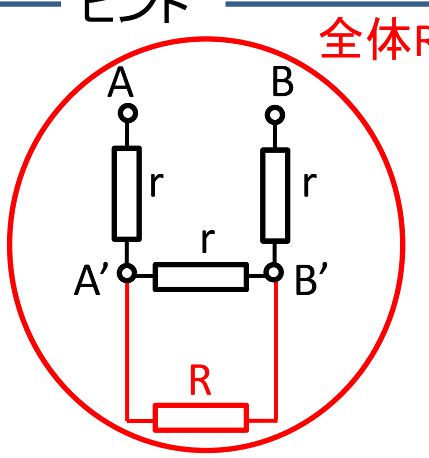


（2）



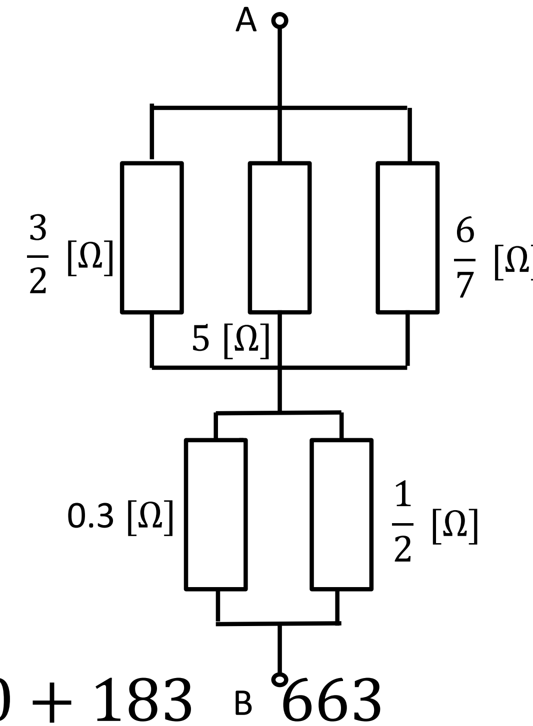
訂正： ヒントが正確ではありませんでした。正しくは以下のようになります。

ヒント



全体の抵抗をRとすると、無限に下に続くので、<u>A'B'から下をみた抵抗</u>も全体Rと等しくなる。

✴応用問題1　解答（1）



（1）

上半分の合成抵抗

$$R_a = \left(\frac{20+6+35}{30}\right)^{-1} = \left(\frac{61}{30}\right)^{-1} = \frac{30}{61}$$

下半分の合成抵抗

$$R_b = \frac{0.3\times0.5}{0.3+0.5} = \frac{0.15}{0.8} = \frac{15}{80} = \frac{3}{16}$$

全体の抵抗

$$R_a + R_b = \frac{30}{61} + \frac{3}{16} = \frac{30\times16+61\times3}{61\times16} = \frac{480+183}{976} = \frac{663}{976}$$

$$\frac{663}{976} = \frac{3\times13\times17}{61\times2^4}$$

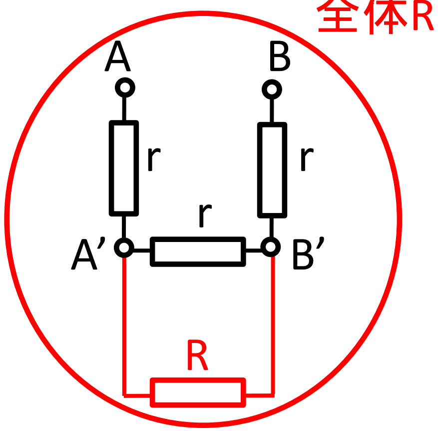
これ以上約分できない = 答え　$\frac{663}{976}$

✴応用問題1　解答（2）

（2）ヒントに基づいて方程式を立てると

$$R = 2r + \frac{rR}{r+R}$$
$$R - 2r = \frac{rR}{r+R}$$
$$(R-2r)(R+r) = rR$$
$$R^2 - rR - 2r^2 = rR$$
$$R^2 - 2rR - 2r^2 = 0$$

ヒント



二次方程式の解の公式より

$$R = \frac{2r \pm \sqrt{4r^2+8r^2}}{2} = \frac{2r \pm \sqrt{12r^2}}{2} = \frac{2r \pm 2r\sqrt{3}}{2} = r \pm r\sqrt{3} = r(1 \pm \sqrt{3})$$

r = 1を代入して

$$R = 1 \pm \sqrt{3} = 1 \pm 1.732 \ldots$$

抵抗値は負の値を取らないので答えは以下のようになる。

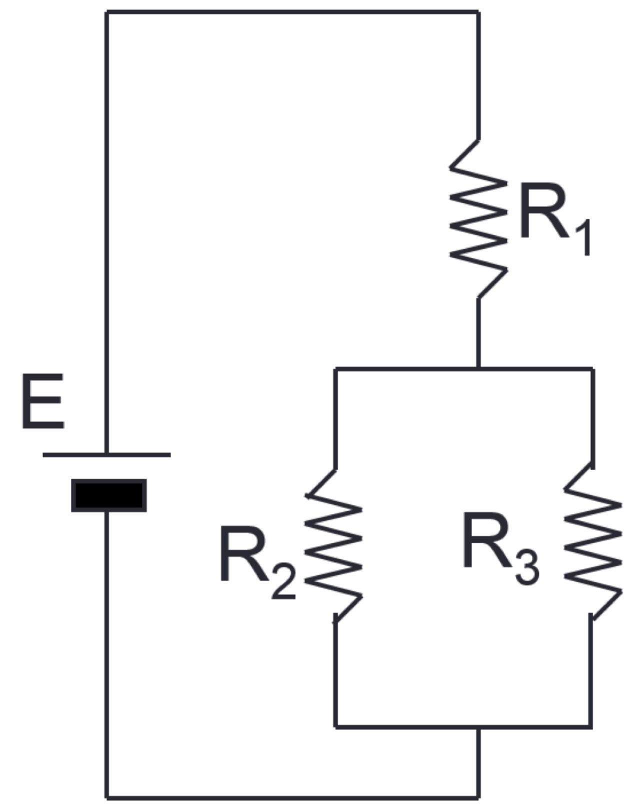
$$R = 1 + \sqrt{3}$$

例題2　消費電力

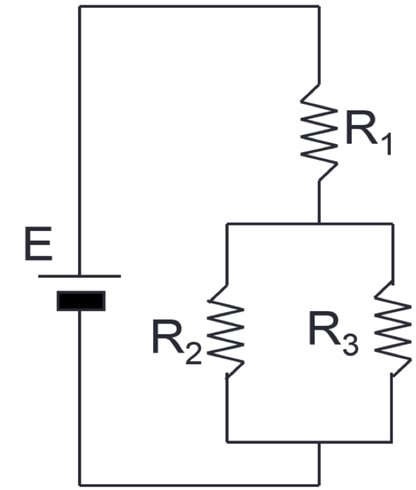
R_1=1, R_2=8, R_3 = 12[Ω], E=58[V]となる以下のような回路を作製したとき

（１）回路全体の消費電力を求めよ。

（２）5秒間電流を流した時、R_1で発生する熱量を求めよ。



例題2　解答



（1）消費電力

$$P = VI$$

→　全体の消費電力を知るには、全体の電流が必要

　→　全体の電流を知るには、全体の抵抗（合成抵抗）が必要

まず合成抵抗を求める

①並列部分（下半分）

$$R_{23} = \frac{積}{和} = \frac{R_2 \times R_3}{R_2 + R_3} = \frac{8 \times 12}{8 + 12} = \frac{96}{20} = 4.8$$

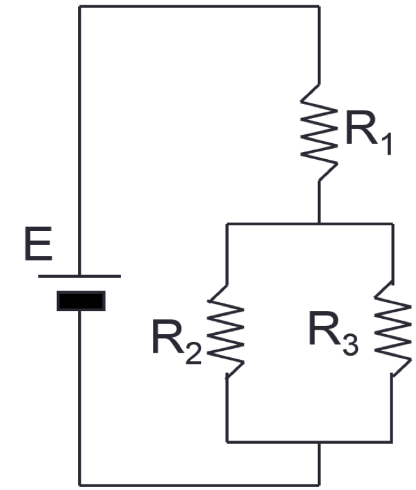
②直列部分（全体）

$$R_{123} = R_1 + R_{23} = 1 + 4.8 = 5.8$$

消費電力

$$I = \frac{V}{R} = \frac{E}{R_{123}} = \frac{58}{5.8} = 10, \qquad P = VI = EI = 58 \times 10 = 580\ [W]$$

例題2　解答



（2）熱量

$$\mathrm{H} = P \times t = VI \times t$$

R_1の消費電力を知るにはR_1の電流と電圧がいる

→　R_1の電流は全体の電流と等しい　＆　抵抗はわかっている

→　R_1の電圧はオームの法則で求められる

$$V_1 = R_1 I = 1 \times 10 = 10$$

R1の消費電力

$$P_1 = V_1 I = 10 \times 10 = 100$$

R1の発熱量

$$H_1 = P_1 \times t = 100 \times 5 = 500\ [Ws] = 500[J]$$

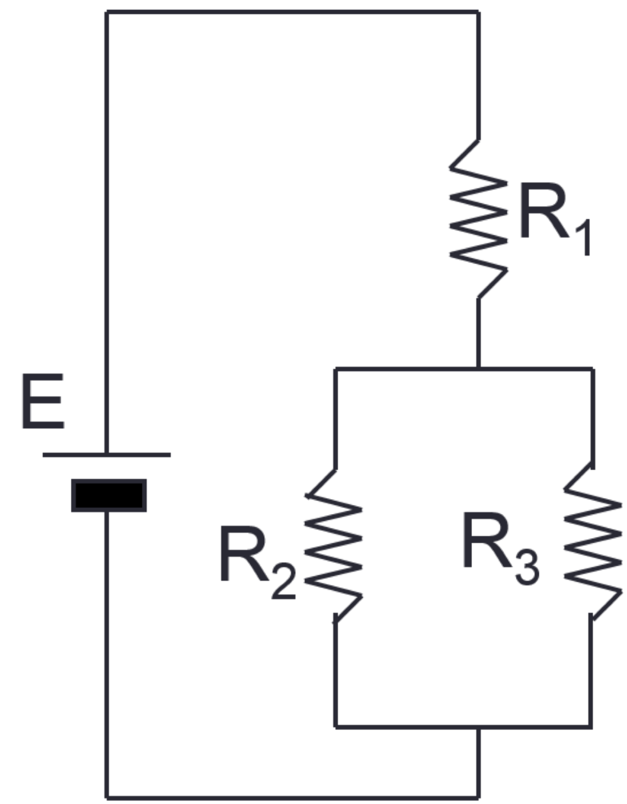
練習問題2

R_1=0.1, R_2=1, R_3 = 9[Ω], E=30[V]となる以下のような回路を作製したとき

（１）消費電力を求めよ。

（２）10秒間電流を流した時のR1で発生する熱量を求めよ。

✴（３）R_1において300[J]の熱量を得るためには何秒間電流を流せば良いか。



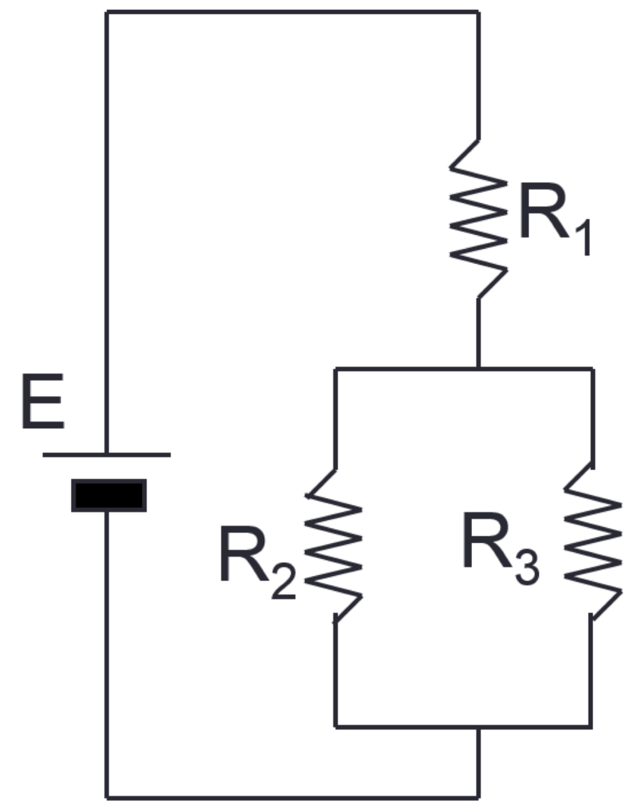
練習問題2

R_1=0.1, R_2=1, R_3 = 9[Ω], E=30[V]となる以下のような回路を作製したとき

（１）消費電力を求めよ。

（２）10秒間電流を流した時のR1で発生する熱量を求めよ。

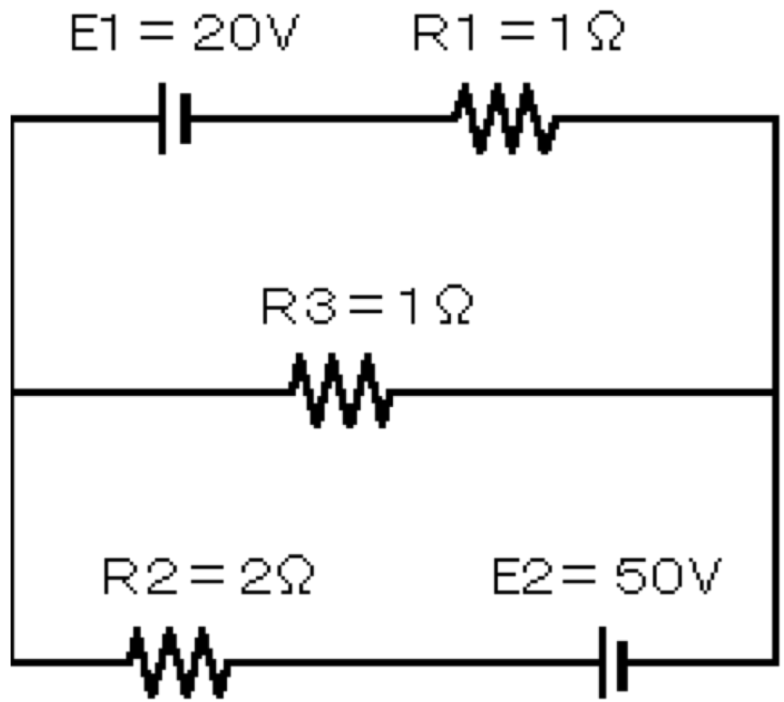
＊（３）R_1において300[J]の熱量を得るためには何秒間電流を流せば良いか。



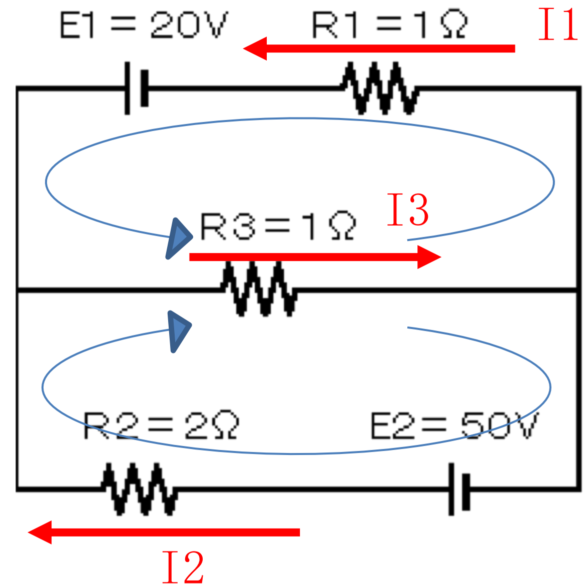
答え
（１）900[W]
（２）900[J]
（３）10/3[s]

例題３　キルヒホッフの法則

図の回路の各抵抗に流れる
電流の大きさを求めよ。



例題3　解答



点Aでキルヒホッフの第一法則より

$$I_1 + I_2 = I_3$$

上の回路で

起電力: E_1,　電圧降下: $R_1 I_1$, $R_3 I_3$

キルヒホッフの第二法則より

$E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3$

$20 = I_1 + I_3$

下の回路で

起電力: E_2,　電圧降下: $R_2 I_2$, $R_3 I_3$

キルヒホッフの第二法則より

$E_2 = R_2 I_2 + R_3 I_3$

$50 = 2I_2 + I_3$

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ 20 = I_1 + I_3 \\ 50 = 2I_2 + I_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ I_1 + I_3 = 20 \\ 2I_2 + I_3 = 50 \end{cases}$$

連立方程式の解き方

ガウスの消去法

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 3 \\ x - y + 3z = 4 \\ 2x + 3y - 5z = 1 \end{cases}$$

①２番目以降からxを消す（変数を２つにする）

②３番目からyを消す（変数を1つにする）

連立方程式の解き方2

２番目以降からxを消す（変数を２つにする）

$$\begin{cases} x+2y-2z=3 \cdots ① \\ x-\ \ y+3z=4 \cdots ② \\ 2x+3y-5z=1 \cdots ③ \end{cases}$$

②から①をひく

$$\begin{array}{rr} & x-y+3z=4 \\ -) & x+2y-2z=3 \\ \hline & -3y+5z=1 \end{array}$$

③から①×2をひく

$$\begin{array}{rr} & 2x+3y-5z=1 \\ -) & 2x+4y-4z=6 \\ \hline & -y-z=-5 \\ & y+z=5 \end{array}$$

X消去後

$$\begin{cases} x+2y-2z=3 \\ -3y+5z=1 \\ y+z=5 \end{cases}$$

連立方程式の解き方3

３番目からyを消す（変数を１つにする）

$$\begin{cases} x+2y-2z=3 \cdots ① \\ \quad -3y+5z=1 \cdots ② \\ \qquad y+z=5 \cdots ③ \end{cases}$$

③に②÷3を足す

$$\begin{array}{rr} & y+z=5 \\ +) & -y+\frac{5}{3}z=\frac{1}{3} \\ \hline & \frac{8}{3}z=\frac{16}{3} \\ & z=2 \end{array}$$

②にz=2を代入

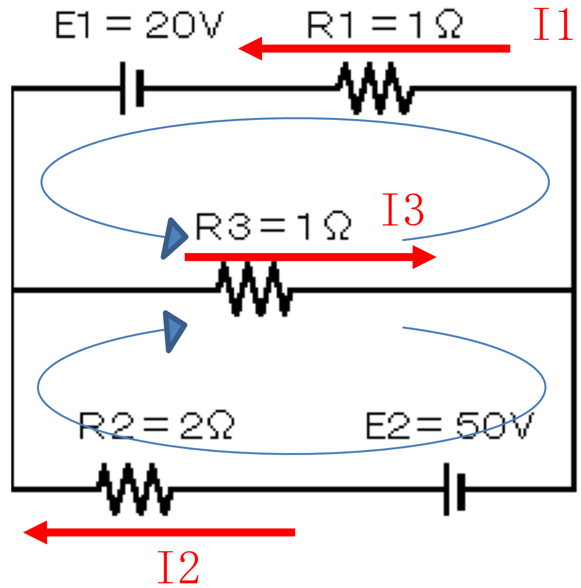
$$\begin{aligned} -3y+10&=1 \\ -3y&=-9 \\ y&=3 \end{aligned}$$

①にy=3, z=2を代入

$$\begin{aligned} x+6-4&=3 \\ x+2&=3 \\ x&=1 \end{aligned}$$

$$\underline{x=1, \quad y=3, \quad z=2}$$

例題3　解答



$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \cdots ① \\ I_1 + I_3 = 20 \cdots ② \\ 2I_2 + I_3 = 50 \cdots ③ \end{cases}$$

② − ①

$$\begin{aligned} I_1 \quad + I_3 &= 20 \\ I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \\ -I_2 + 2I_3 &= 20 \cdots ②' \end{aligned}$$

③ + ②′ × 2

$$\begin{aligned} 2I_2 + I_3 &= 50 \\ -2I_2 + 4I_3 &= 40 \\ 5I_3 &= 90 \\ I_3 &= 18 \end{aligned}$$

$I_3 = 18$を②′に代入

$$\begin{aligned} -I_2 + 36 &= 20 \\ -I_2 &= -16 \\ I_2 &= 16 \end{aligned}$$

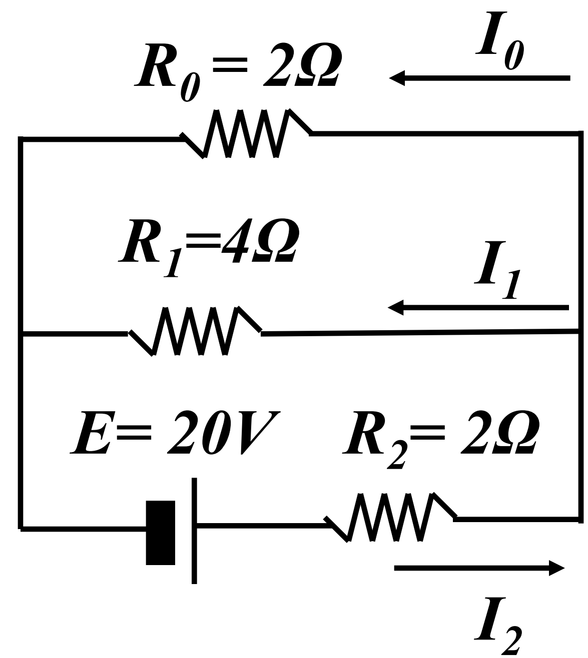
①に$I_2 = 16,\ I_3 = 18$を代入

$$\begin{aligned} I_1 + 16 - 18 &= 0 \\ I_1 - 2 &= 0 \\ I_1 &= 2 \end{aligned}$$

$\underline{I_1 = 2, \qquad I_2 = 16, \qquad I_3 = 18\ [A]}$

練習問題3

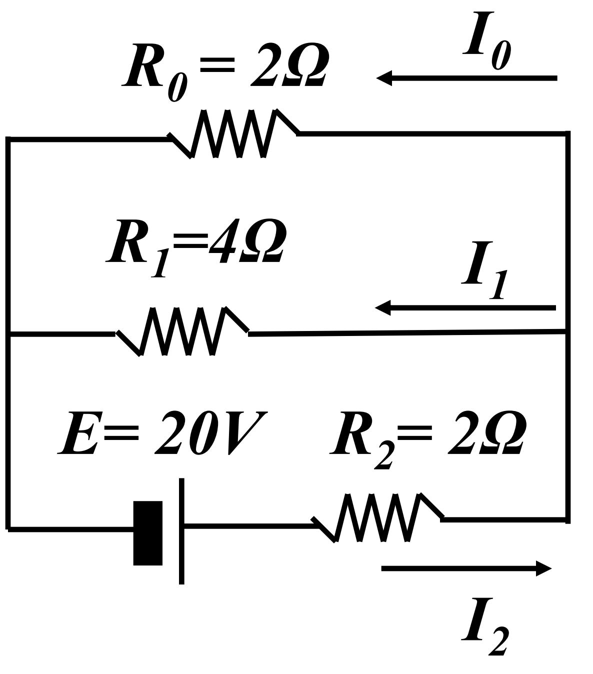
キルヒホッフの法則を使って
各抵抗を流れる電流を求めよ。



練習問題3

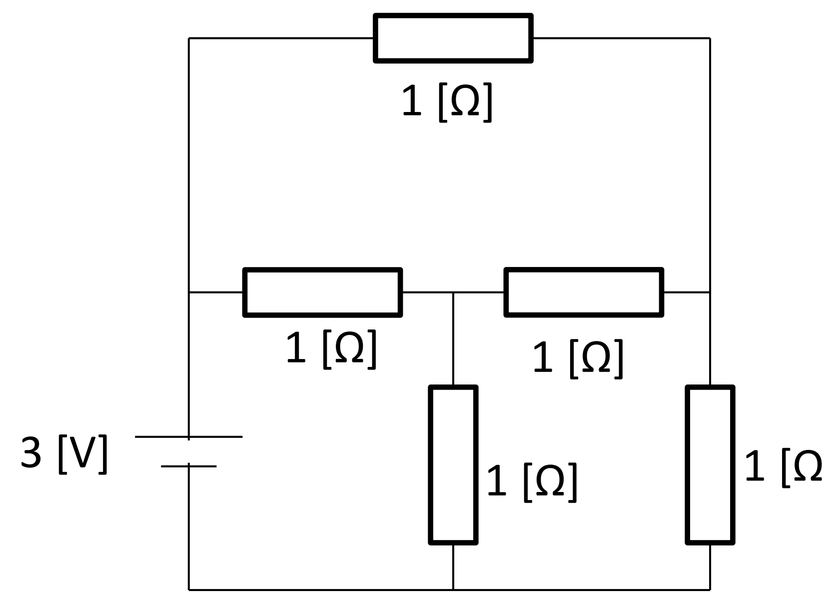
キルヒホッフの法則を使って
各抵抗を流れる電流を求めよ。

答え
$I_0 = 4$ [A]
$I_1 = 2$ [A]
$I_2 = 6$ [A]



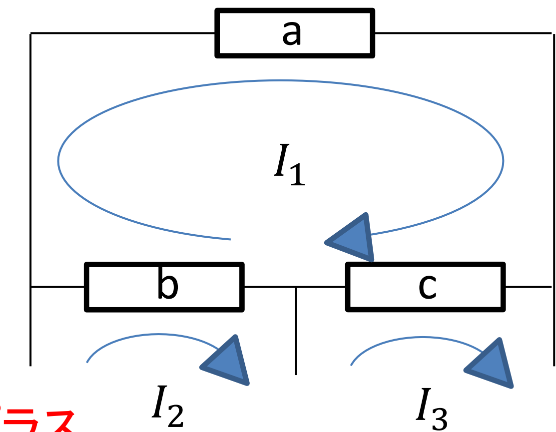
＊応用問題3

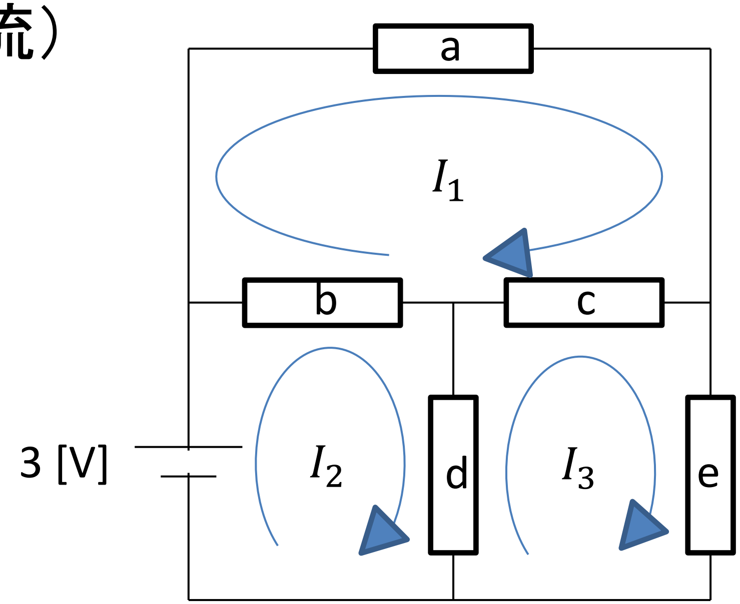
図の回路で各抵抗に流れる電流を求めよ



✴応用問題3 ヒント

電流を抵抗ごとではなく
ループごとに定義する（ループ電流）
・ループI_1について





時計回りをプラス

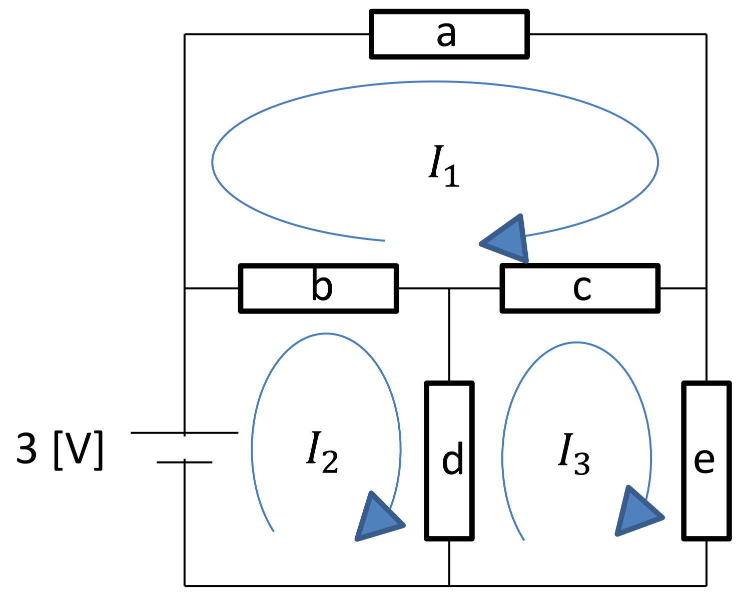
$$3I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

反時計回り（I_1と逆向き）
なのでマイナス

＊応用問題3 ヒント

ループI_2, I_3について同様にして式を立てると

$$\begin{cases} 3I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ -I_1 + 2I_2 - I_3 = 3 \\ -I_1 - I_2 + 3I_3 = 0 \end{cases}$$



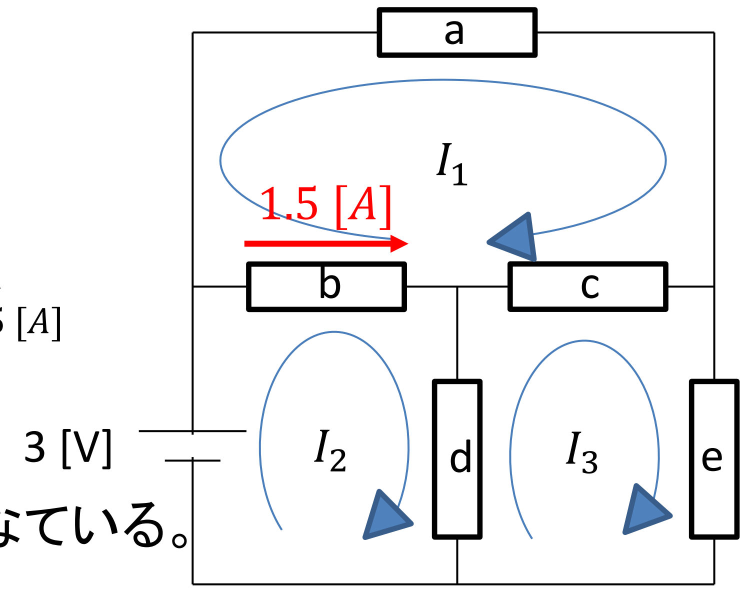
＊応用問題3 ヒント

I_1, I_2, I_3を求めたらそれぞれの合成によって
各抵抗に流れる電流が求まる。

bに流れる電流はI_1とI_2の合成

$$I_b = I_1 - I_2 = 1.5 - 3 = -1.5\ [\mathrm{A}]$$

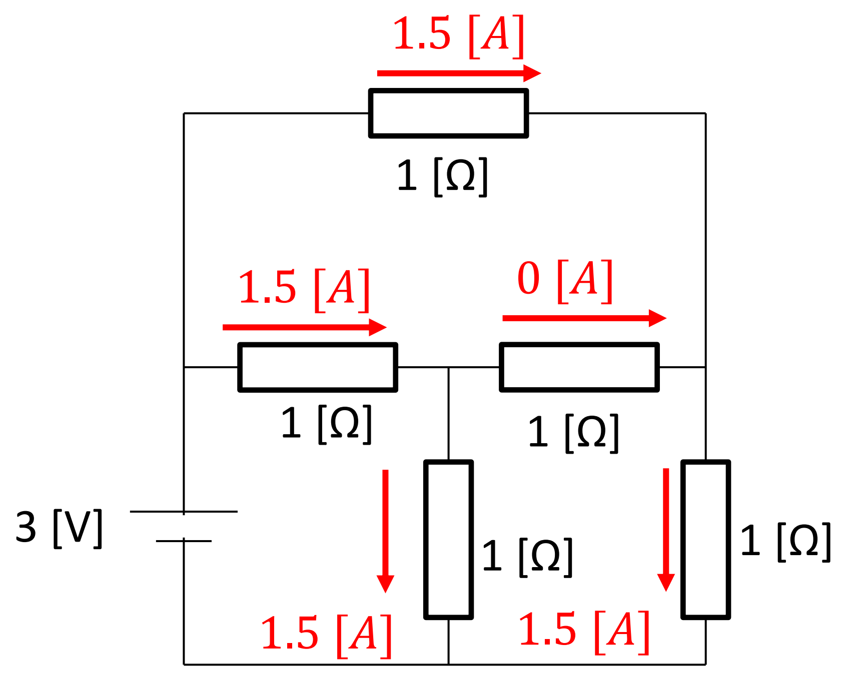
I_1をプラスと仮定　I_2はI_1と逆なので マイナス　答えがマイナスになったので、プラスと仮定したI_1と逆方向に1.5 $[A]$



Q. cに流れる電流は？
ヒント：　回路をよく見るとあるブリッジ回路になている。
（平衡条件も成り立っている）
キルヒホッフによる計算結果と一致するか。

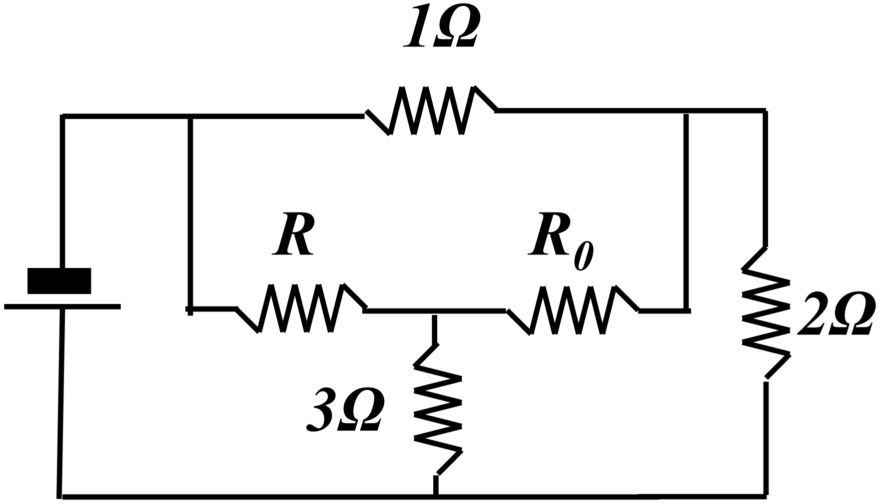
✴応用問題３　解答

図の回路で各抵抗に流れる電流を求めよ



例題4

抵抗R_0に流れる電流が0[A]になるとき、
抵抗Rの値はいくらか



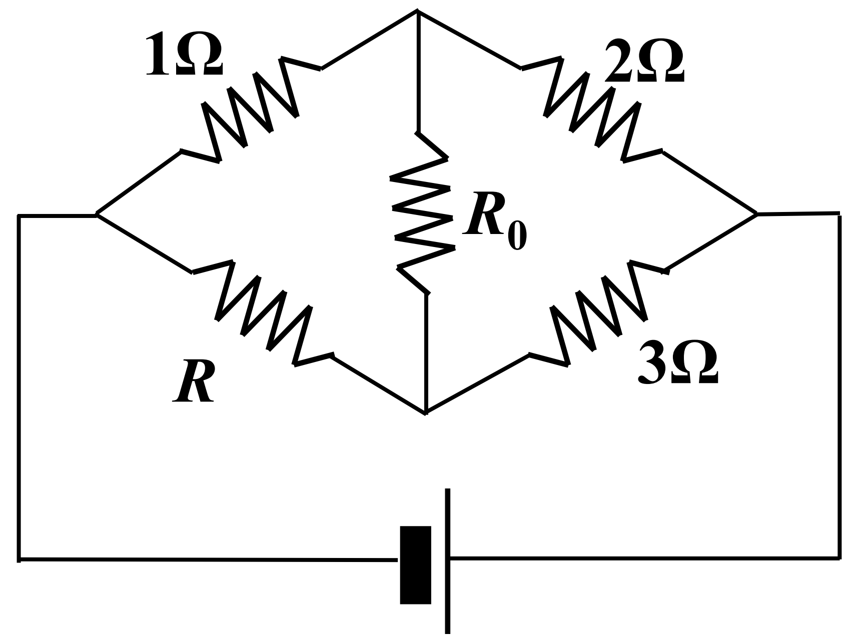
例題4 解答

図の回路はホイートストンブリッジである。
問題から、平衡条件が成り立っているので、次の式が成り立つ。

$$\frac{1}{R} = \frac{2}{3}$$

$$R = \frac{3}{2}$$

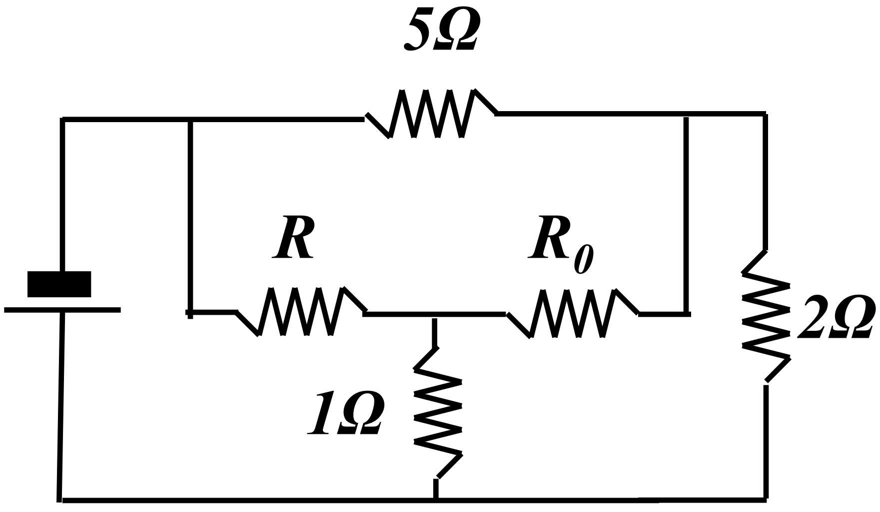
$$= 1.5\ [\Omega]$$



練習問題4

図の回路において抵抗R_0に流れる電流が0[A]になるとき、
抵抗Rの値 を求めよ。

答え
R = 2.5 [Ω]



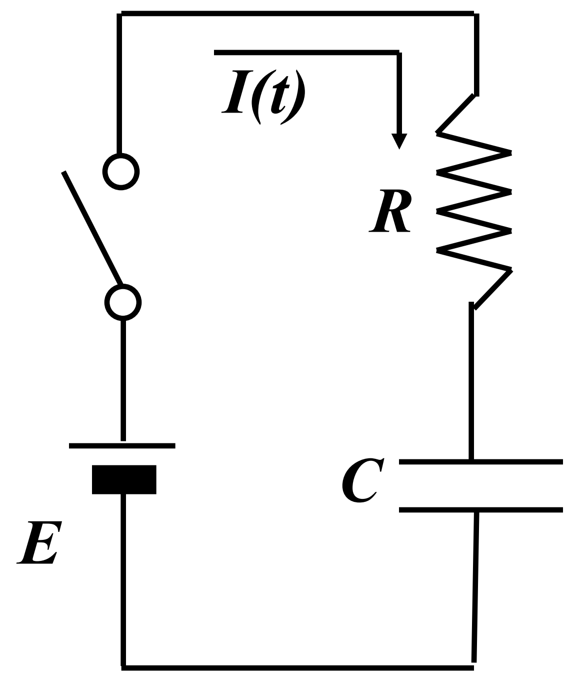
確認問題1

電池の起電力E=32 [V]、抵抗R=4 [Ω]

コンデンサの静電容量C=5 [F]

(1)時定数τの値を求めよ。

(2)抵抗に加わる電圧、電流のグラフを描け。グラフには電圧、電流の最大値、時定数、時定数の時の電圧、電流の値を明確に示せ。

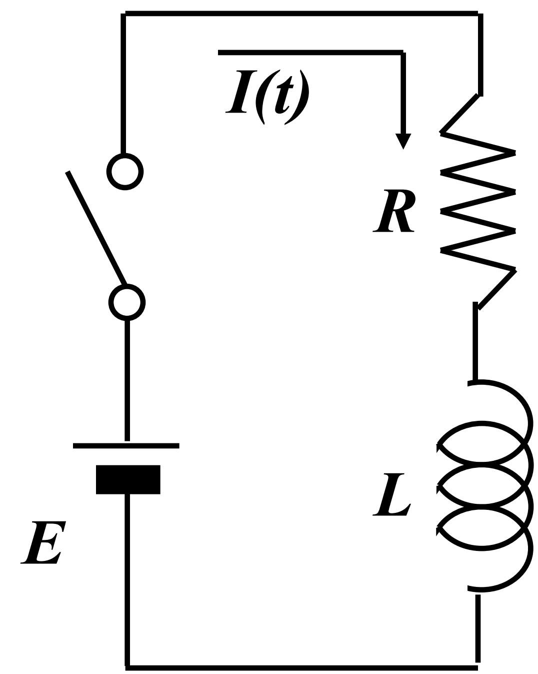


確認問題２

電池の起電力E=20 [V]、抵抗R=5 [Ω]
コイルの自己インダクタンスL=15 [H]

(1)時定数τの値

(2)抵抗に加わる電圧、電流のグラフを描け。グラフには電圧、電流の最大値、時定数、時定数の時の電圧、電流の値を明確に示せ。



確認問題3

右図の様な回路を作成した。

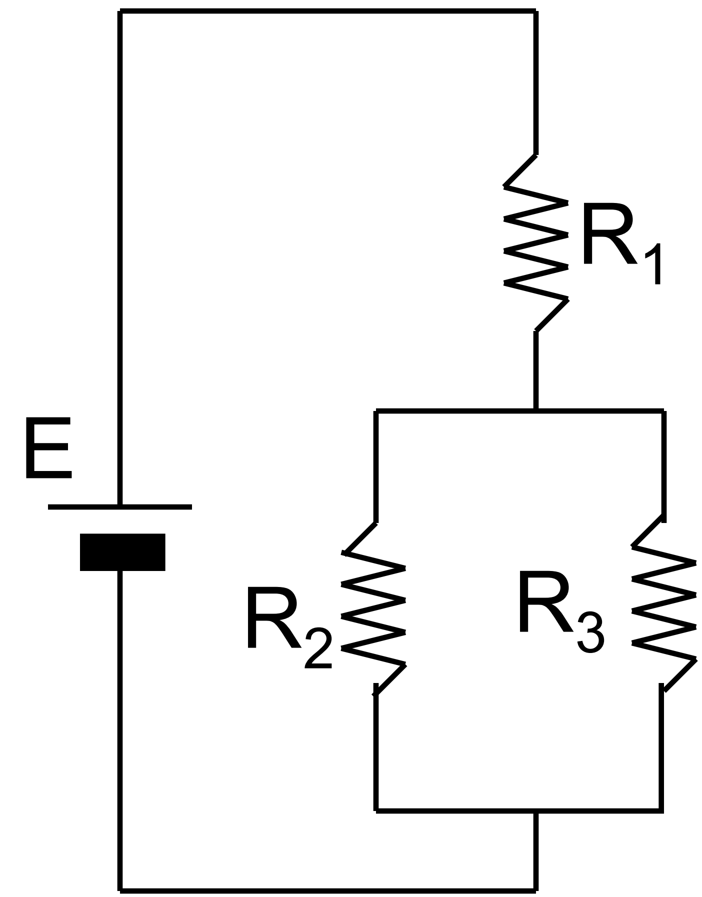
全体の合成抵抗Rを求めよ。

R_1=20, R_2=10, R_3=10[Ω]

電池電圧をE = 100[V]として、

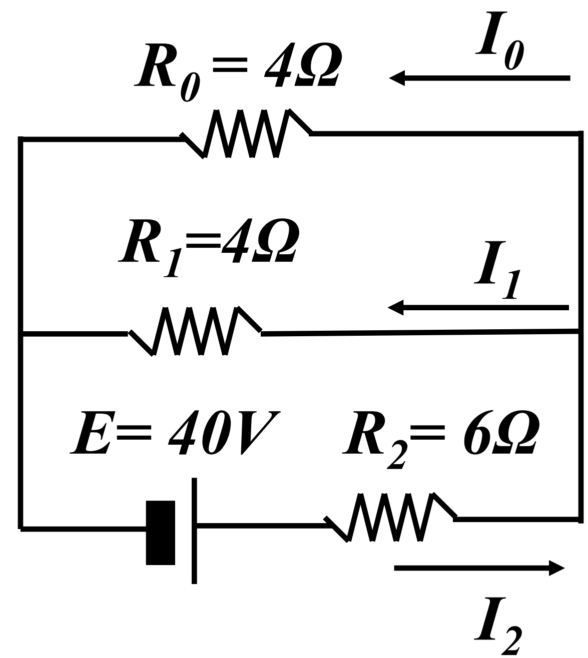
（1）全体の電力Pを求めよ。

（2）R_2で1000 [J]の熱量を発生させるには何秒間電流を流せば良いか。



確認問題4

キルヒホッフの法則を使って
抵抗R_0を流れる電流I_0を求めよ。



確認問題5

電池の起電力 E_1 は何Vか？